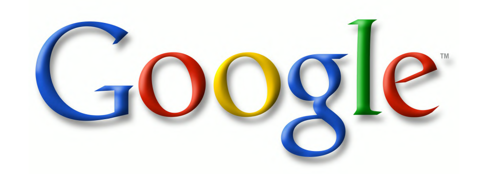
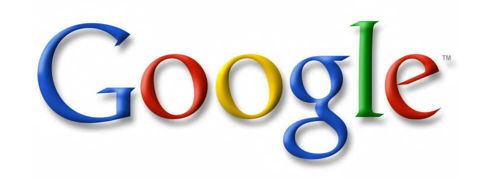
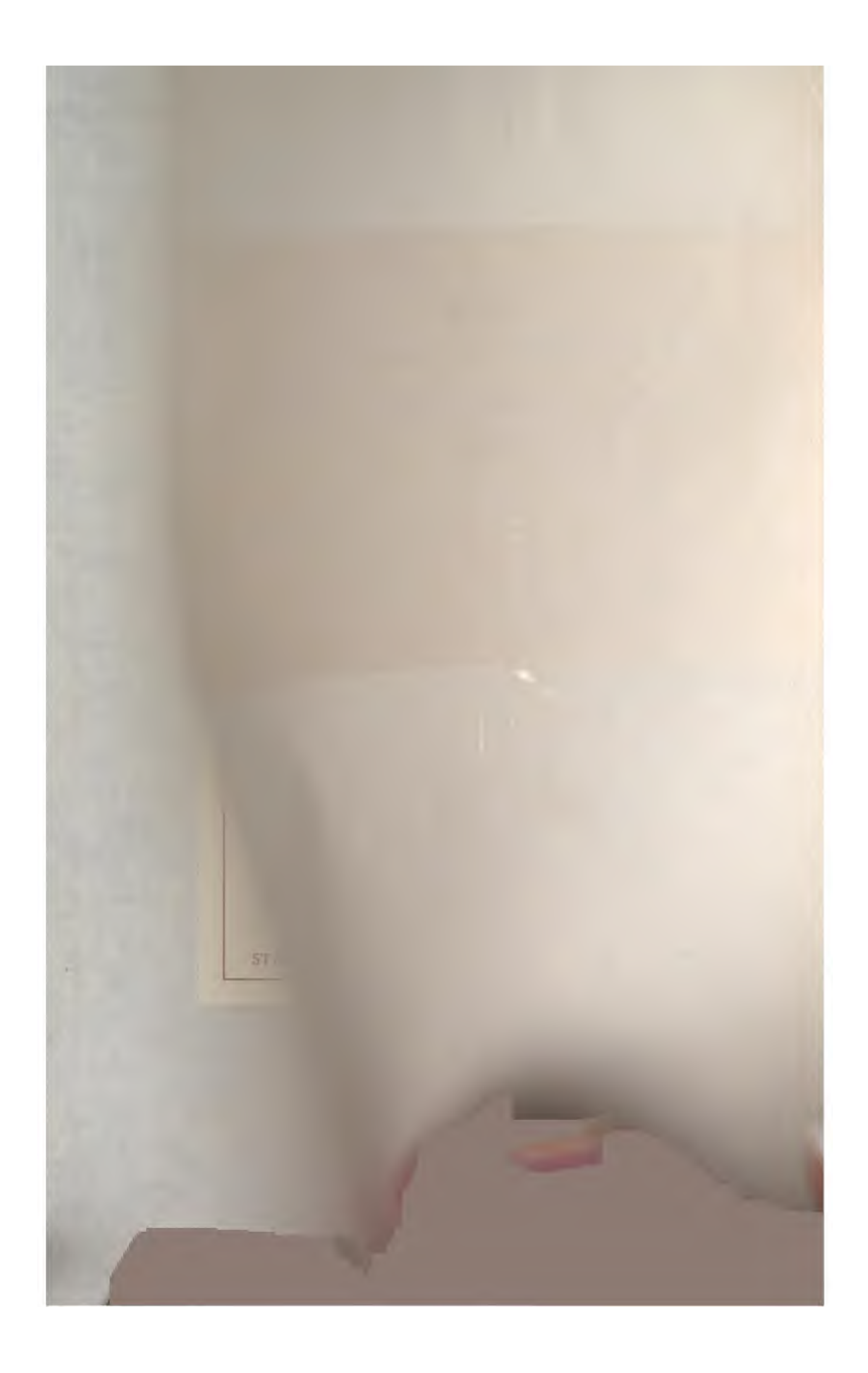






П. А. Некрасовъ.

ИСЧИСЛЕНІЕ ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЫРАЖЕНІЙ ФУНКЦІЙ ВЕСЬМА БОЛЬШИХЪ ЧИСЕЛЪ.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1900.



П. А. Некрасовъ.

ИСЧИСЛЕНІЕ ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЫРАЖЕНІЙ ФУНКЦІЙ ВЕСЬМА БОЛЬШИХЪ ЧИСЕЛЪ.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1900.

Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при
Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.
Математическій Сборникъ, Т. XXI.

СОДЕРЖАНІЕ.

ИСЧИСЛЕНІЕ ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЫРАЖЕНІЙ ФУНКЦІЙ ВЕСЬМА БОЛЬШИХЪ ЧИСЕЛЪ.

П. А. Некрасова.

ВВЕДЕНІЕ.

Многіе вопросы математическаго трансцедентнаго анализа и его приложеній связаны съ особымъ исчисленіемъ, задача котораго состоитъ въ опредѣленіи приближенныхъ выраженій интеграловъ вида:

$$\int f(z)\,\psi^m(z)\,dz, \tag{1}$$

гдѣ m есть весьма большое положительное число и

$$\psi^m(z) = \{\psi(z)\}^m.$$

Перечислимъ важнѣйшіе изъ этихъ вопросовъ.

I. Производныя

$$\frac{d^m\,\Phi(x)}{dx^m} \text{ и } \frac{d^{m+s}\{f(x)\varphi^m(x)\}}{dx^{m+s}}$$

представляются посредствомъ интеграловъ вида (1). Поэтому всѣ теоріи, въ которыхъ приходится имѣть дѣло съ вычисленіемъ такихъ производныхъ, связаны съ приближеннымъ вычисленіемъ интеграловъ вида (1). Напримѣръ, вопросы о сходимости рядовъ Тейлора, Маклорена и Лагранжа и о средствахъ облегчить трудности, встрѣчающіяся при численномъ опредѣленіи ихъ суммы, разрѣшаются указаннымъ вычисленіемъ и притомъ въ болѣе трудныхъ случаяхъ, когда перемѣн-

ное, по степенямъ котораго располагается соотвѣтствующій рядъ, достигаетъ самыхъ границъ области сходимости этого ряда.

II. Теоріи рядовъ, расположенныхъ по функціямъ тригонометрическимъ, сферическимъ и имъ подобнымъ, а также вопросы о погрѣшностяхъ формулъ интерполированія и механическихъ квадратуръ связаны съ приближеннымъ вычисленіемъ интеграловъ вида (1).

III. Важнѣйшіе изъ законовъ Теоріи Вѣроятностей связаны съ тѣмъ же приближеннымъ вычисленіемъ, при чемъ въ Теоріи Вѣроятностей приходится, между прочимъ, имѣть дѣло и съ такими случаями, когда функція $\psi(z)$ представляется въ формѣ:

$$\psi(z) = \{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)\,\theta(z)\}^{\frac{1}{m}}$$

и, слѣдовательно, сама зависитъ отъ числа m.

IV. Само собою разумѣется, что разсматриваемое исчисленіе не могло не проникнуть въ области прикладныхъ математическихъ наукъ. Такъ, труднѣйшіе вопросы Небесной Механики, вынужденной прибѣгать къ безконечнымъ рядамъ, разрѣшаются посредствомъ приближенныхъ вычисленій интеграловъ, принадлежащихъ къ виду (1).

Систематическое изложеніе главныхъ основаній этого исчисленія составляетъ предметъ настоящаго изслѣдованія.

Послѣ *Лапласа*, который впервые трактовалъ общій вопросъ о приближенномъ вычисленіи интеграловъ вида (1) [1]), эта задача не разъ обращала на себя вниманіе математиковъ. *Коши* посвятилъ этому вопросу важную статью: «Mémoire sur divers points d'analyse» [2]), которую послѣдующіе авторы забыли. *Дарбу* въ Journal de Mathématiques pures et appliquées (3-e série, t. IV, 1878) весьма остроумно примѣнилъ къ вычисле-

---

[1]) *Laplace*, Théorie analytique des probabilités. Seconde partie. Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. (Oeuvres de *Laplace*, t. VII, p. 97—194, 1847).

[2]) *Cauchy*, Mémoire sur divers points d'analyse. (Mémoires de l'Académie de France, t. VIII, p. 130—138, 1829).

нію интеграловъ вида (1) теорію тригонометрическихъ рядовъ [1]) и полученными результатами воспользовался для точнѣйшаго изслѣдованія сходимости рядовъ, расположенныхъ по функціямъ Лежандра, Чебышева и пр. *Flamme* воспользовался теоріей Дарбу для примѣненія къ задачамъ Небесной Механики [2]).

Для приближеннаго вычисленія интеграла вида (1) въ частныхъ случаяхъ придуманы различные остроумные пріемы, которые можно найти въ трудахъ Carlini [3]), Jacobi [4]), Scheibner [5]), Hansen [6]), Poisson [7]) и другихъ. Многія важныя замѣчанія относительно исчисленія приближенныхъ величинъ интеграловъ вида (1) сдѣланы въ III главѣ моей диссертаціи «*Рядъ Лагранжа*» [8]) въ звязи съ вопросомъ относительно приближенныхъ выраженій далекихъ членовъ этого ряда.

---

[1]) *Darboux*, Mémoire sur l'approximation des fonctions de très—grands nombres. Нѣкоторыя изъ формулъ, принимаемыхъ Darboux за „новыя" (р. 26 и 28), принадлежатъ Коши и указаны въ его упомянутомъ выше мемуарѣ.

[2]) *J. B. Flamme*, Recherche des expressions approchées des termes très éloignés dans les développements du mouvement elliptique des planètes. (Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris). 1887.

[3]) *Carlini*, Ricerche Sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del Problema di Keplero. Milano. 1817.

[4]) *Jacobi*, Ueber die annähernde Bestimmung sehr entfernter Glieder in der Entwickelung der elliptischen Coordinaten nebst einer Ausdehnung der Laplaceschen Methode sur Bestimmung der Functionen gerader Zahlen (Astronomische Nachrichten, n°665, 1848) а также Untersuchungen über die Convergenz der Reihe durch welche das Kepler'sche Problem gelöst wird (Astronomische Nachrichten, nn° 709, 710, 711, 712; 1849).

[5]) *Scheibner*, Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie (Mathematische Annalen, t. XVII). Leipzig. 1880.

[6]) *Hansen*, Entwickelung des Products einer Potenz des Radiusvectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, etc. Leipzig, Hirzel, 1853.

[7]) *Poisson*, Recherches sur la probabilité des jugements, p. 172—317. Paris. 1837.

[8]) См. „Математическій Сборникъ", т. XII. 1885.

Надлежитъ упомянуть здѣсь объ изслѣдованіяхъ *Чебышева* [1]) и другихъ [2]) относительно предѣльныхъ величинъ интеграловъ. Эти изслѣдованія имѣютъ въ виду другую постановку задачи, въ которой большое число m не играетъ, какъ въ настоящемъ изслѣдованіи, существенной роли, а интегралъ относится исключительно къ дѣйствительному перемѣнному и къ дѣйствительной интегрируемой функціи. Однако указанныя изслѣдованія имѣютъ многія точки соприкосновенія съ исчисленіемъ приближенныхъ величинъ интеграловъ вида (1) и сходятся, напримѣръ, въ приложеніяхъ къ Теоріи Вѣроятностей, давая совпадающіе результаты при раскрытіи законовъ массовыхъ независимыхъ случайныхъ явленій. Но постановка вопроса и методы упомянутыхъ Петербургскихъ изслѣдованій, начатыхъ П. Л. Чебышевымъ, настолько отличны отъ настоящаго изслѣдованія,

---

[1]) *П. Л. Чебышевъ*: 1) „Sur les valeurs limites des intégrales" (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1874).

2) „О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ" (Приложеніе къ LI-му тому Записокъ Имп. Академіи Наукъ, 1885).

3) „Объ интегральныхъ вычетахъ, доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ" (Приложеніе къ LV-му тому Записокъ Имп. Академіи Наукъ, 1887).

4) „О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей" (Приложеніе къ LV-му тому Записокъ Имп. Академіи Наукъ, 1887).

[2]) *А. А. Марковъ*: 1) „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей". С.-Петербургъ. 1884.

2) „О предѣльныхъ величинахъ интеграловъ" (Извѣстія Имп. Академіи Наукъ, Т. II, № 3, 1895).

К. А. Поссе, „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей". С.-Петербургъ. 1886.

Н. Я. Сонинъ, „О точности опредѣленія предѣльныхъ величинъ интеграловъ" (Записки Имп. Академіи Наукъ, Т. LXIX. 1892).

Этотъ перечень могъ бы быть пополненъ указаніями на другія статьи, относящіяся къ вопросу о предѣльныхъ величинахъ интеграловъ и принадлежащія *В. Г. Имшенецкому*, *А. Н. Коркину*, *К. А. Поссе*, *К. А. Андрееву*, *Н. Я. Сонину*, *А. А. Маркову*. Указанія эти читатели найдутъ въ статьѣ *А. В. Васильева*: „П. Л. Чебышевъ и его ученые труды" („P. L. Tchébychef et son oeuvre scientifique", Turin. Charles Clausen. 1898).

что ниже намъ вовсе не придется соприкасаться съ этими изслѣдованіями. Настоящее изслѣдованіе ближе всего соприкасается съ вышеупомянутыми трудами Лапласа, Коши и Дарбу. Лишь въ концѣ настоящей статьи будутъ сдѣланы краткія замѣчанія о возможномъ сближеніи направленія нашего изслѣдованія съ Петербургскимъ, каковое сближеніе можетъ быть полезнымъ для обоихъ направленій. Затѣмъ съ изслѣдованіями П. Л. Чебышева мы встрѣтимся тогда, когда перейдемъ въ область приложеній нашихъ методовъ къ Теоріи Вѣроятностей. Приложенія эти имѣютъ явиться въ другой нашей статьѣ, тѣсно связанной съ настоящимъ изслѣдованіемъ, которое представляетъ введеніе въ эту статью.

Въ виду сложности и крайней тонкости вопроса о приближенномъ вычисленіи интеграла (1) различныя предложенныя рѣшенія его еще представляютъ нѣкоторыя важныя несовершенства. Поэтому новое изложеніе рѣшенія задачи представляется не лишеннымъ интереса.

Предлагаемый здѣсь способъ вычисленія приближенныхъ выраженій интеграловъ вида (1) есть результатъ изученія прежнихъ способовъ. Этотъ способъ устраняетъ при рѣшеніи задачи побочныя теоріи, какъ-то: теоріи женератрисъ, тригонометрическихъ рядовъ и т. п. Подобныя теоріи, которыми пользуются Лапласъ, Дарбу и другіе, загромождаютъ рѣшеніе трудной задачи, не принося существенной пользы.

Въ основу рѣшенія задачи я кладу тщательное и необходимое для существа дѣла разслѣдованіе измѣненій функціи $\psi(z)$ и ея модуля, играющаго важную роль. Изученію этихъ измѣненій не отводилось достаточно вниманія предшествующими авторами, между тѣмъ какъ для рѣшенія разсматриваемой задачи желательно возможно болѣе полное знакомство съ этими измѣненіями.

Такое знакомство привело меня къ новымъ и важнымъ понятіямъ и къ особымъ количественнымъ элементамъ, которые въ каждомъ данномъ случаѣ полнѣе характеризуютъ свойства искомыхъ приближенныхъ выраженій и ихъ погрѣшностей. Основанный на болѣе полномъ изслѣдованіи функціи $\psi(z)$

способъ приближеннаго вычисленія интеграловъ вида (1) кажется сложнѣе формально простого способа Дарбу, но лишь по тому, что онъ глубже проникаетъ въ существо дѣла. При этомъ кажущійся простымъ способъ Дарбу уступаетъ предлагаемому способу по другой причинѣ: принципъ, введенный Дарбу въ рѣшеніе разсматриваемой задачи и заимствованный изъ теоріи тригонометрическихъ рядовъ, не достаточенъ, такъ какъ вопросъ при его сложности и тонкости не можетъ быть обнятъ сполна этимъ простымъ принципомъ [1]).

Выведенныя ниже формулы имѣютъ, между прочимъ, то преимущество, что онѣ снабжены средствами выражать не только порядокъ малости допускаемыхъ погрѣшностей, но и предѣлы ихъ, каковые предѣлы вообще не указывались прежними авторами [2]). Главнымъ рессурсомъ въ этой части изслѣдованія являются теоріи ряда Маклорена и ряда Лагранжа съ теоремою *Коши-Руше*. При томъ упомянутая теорема даетъ возможность поставить рѣшеніе общихъ вопросовъ разсматриваемаго исчисленія на строгія и прочныя основы.

Вообще по поводу разсматриваемаго исчисленія и теоріи ряда Лагранжа нужно сказать, что это двѣ родственныя области, ибо имѣютъ много разностороннихъ и существенныхъ соприкосновеній. Отсюда тѣснѣйшее соприкосновеніе важнѣйшихъ вопросовъ Теоріи Вѣроятностей съ рядомъ Лагранжа и методами его изслѣдованія. Принявъ еще во вниманіе связь ряда Ла-

---

[1]) Способъ Дарбу иногда можетъ даже повести къ ошибочнымъ заключеніямъ, тѣмъ болѣе возможнымъ, что принципъ Дарбу не содержитъ условій, внѣ которыхъ онъ теряетъ силу. Недостаточность принципа Дарбу имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ случаяхъ, которые ниже названы особыми перваго рода, когда при этомъ существуютъ такъ называемыя подглавныя точки, упускаемыя изъ виду авторами.

[2]) Въ текстѣ ниже представленъ, между прочимъ, примѣръ опредѣленія предѣловъ погрѣшности приближеннаго выраженія функціи X_m Лежандра. Другой простой примѣръ, соотвѣтствующій особому случаю перваго рода (см. *пп*⁰ 5 и 20), читатели найдутъ въ моей статьѣ: „*Предѣлы погрѣшностей приближенныхъ выраженій вѣроятности P, разсматриваемой въ теоремѣ Якова Бернулли*" и въ дополненіи къ этой статьѣ (Матем. Сборн., т. XX).

гранжа также съ важнѣйшими вопросами Небесной Механики, какъ это было выяснено впервые Лапласомъ, можемъ сказать, что около теоріи ряда Лагранжа группируются знаменитѣйшіе вопросы математическаго естествознанія.

Приводимые ниже выводы были получены мною болѣе четырнадцати лѣтъ тому назадъ и предназначались, какъ четвертая глава моего сочиненія: «*Рядъ Лагранжа и приближенныя выраженія функцій весьма большихъ чиселъ*». По обстоятельствамъ, отвлекавшимъ меня, эта глава до сихъ поръ не могла явиться въ печати. Теперь я нахожу болѣе удобнымъ издать эти результаты не въ видѣ главы вышеупомянутаго сочиненія, а подъ формой отдѣльной статьи, назначенной, между прочимъ, для того, чтобы подготовить средства для доказательства основныхъ теоремъ, приведенныхъ въ моемъ мемуарѣ: «*Общія свойства массовыхъ независимыхъ случайныхъ явленій въ связи съ приближеннымъ вычисленіемъ функцій весьма большихъ чиселъ*» (Матем. Сб. т. XX, 1898), а также слѣдствій этихъ теоремъ.

Тѣ же средства, примѣненныя къ Небесной Механикѣ, которая должна пользоваться приближенными вычисленіями этого рода, безъ сомнѣнія, также привели бы и въ этой области къ пополненію существующихъ выводовъ, по крайней мѣрѣ, въ отношеніи оцѣнки погрѣшностей этихъ вычисленій.

---

§ 1. Нѣкоторыя вспомогательныя формулы, теоремы и опредѣленія.

n°1. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ пользоваться различными вспомогательными теоріями, какъ-то: теоріей функцій комплекснаго перемѣннаго, теоріей ряда Тейлора или Маклорена и ряда Лагранжа. Между прочимъ, мы будемъ часто пользоваться слѣдующими извѣстными формулами, теоремами и опредѣленіями.

I. Пусть функціи $f(x)$ и $F(x)$ при измѣненіи *дѣйствительнаго* перемѣннаго x въ предѣлахъ отъ a до b остаются конеч-

ными и непрерывными и представляютъ собою количества дѣйствительныя, а функція $F(x)$ остается, кромѣ того, положительною. При этихъ условіяхъ будемъ имѣть:

$$\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b F(x)\,dx, \tag{2}$$

гдѣ ξ есть количество, заключающееся въ предѣлахъ a и b,

$$\xi = a + (b - a)\,\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Формула (2) выводится какъ слѣдствіе того, что выраженіе

$$\frac{A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \tag{3}$$

въ которомъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ суть величины положительныя и A_1, $A_2, \ldots, A_n$ суть количества дѣйствительныя, есть *среднее* изъ этихъ послѣднихъ количествъ, т. е. заключается между наименьшимъ и наибольшимъ изъ количествъ: $A_1, A_2, \ldots A_n$. Если величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ совпадаютъ съ значеніями выраженія $F(x)\,dx$, а количества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть значенія фукціи $f(x)$, то дробное выраженіе

$$\frac{\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx}{\int_a^b F(x)\,dx}$$

будетъ частнымъ случаемъ выраженія (3) и будетъ представлять среднее изъ значеній функціи $f(x)$ при измѣненіи x отъ a до b, т. е. величину $f(\xi)$.

II. Пусть функціи $f(x)$ и $F(x)$ при измѣненіи *дѣйствительнаго* перемѣннаго x отъ a до b остаются конечными и непрерывными. Предположимъ, что функція $f(x)$ представляетъ величину комплексную:

$$f(x) = f_1(x) + i\,f_2(x), \; i = \sqrt{-1},$$

гдѣ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суть дѣйствительныя количества. Функція $F(x)$ пусть остается величиною дѣйствительною и положительною. При этихъ условіяхъ будемъ имѣть:

$$\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx = \lambda f(\xi) \int_a^b F(x)\,dx, \qquad (4)$$

гдѣ λ есть комплексное количество, модуль котораго менѣе 1, и ξ есть дѣйствительная величина, заключенная между a и b,

$$\xi = a + (b-a)\,\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Для вывода формулы (4), которая дана впервые Дарбу [1]), можемъ воспользоваться, во-первыхъ, извѣстнымъ свойствомъ модуля суммы, показывающимъ, что

$$\left| \int_a^b f(x)\,F(x)\,dx \right| = \theta_1 \int_a^b |f(x)|\,F(x)\,dx, \qquad (4')$$

гдѣ $0 < \theta_1 < 1$ и $|z|$ есть модуль z. Во-вторыхъ, можемъ воспользоваться формулой (2), на основаніи которой находимъ:

$$\int_a^b |f(x)|\,F(x)\,dx = |f(\xi)| \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (4'')$$

Изъ равенствъ (4′) и (4″) слѣдуетъ равенство (4).

III. Теорема *Коши-Руше* въ теоріи ряда Лагранжа [2]) даетъ простѣйшія условія, когда можно примѣнять этотъ рядъ, имѣющій важное значеніе въ разсматриваемомъ приближенномъ исчисленіи. Хотя эти условія не всегда въ состояніи обнять полный кругъ сходимости ряда Лагранжа [3]), однако простота ихъ выраженія дѣлаетъ теорему Коши-Руше особенно удобопримѣнимою для разъясненія нѣкоторыхъ важныхъ вопросовъ и даетъ возможность довести изложеніе основъ разсматриваемаго приближеннаго исчисленія до полной строгости и отчетливости. Напомнимъ здѣсь выраженіе теоремы Коши-Руше.

---

[1]) См. Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1876.

[2]) См. „Рядъ Лагранжа“, гл. I, § 17.

[3]) См. „Рядъ Лагранжа„ гл. II, §§ 8 и 9.

Пусть $f(\zeta + w)$ *есть функція конечная, непрерывная и однозначная для всѣхъ значеній* w, *модули которыхъ менѣе* r_1, *и неравная нулю при* $w=0$. *Пусть* r *есть данное положительное количество меньшее* r_1. *Если* ω *возрастаетъ отъ* 0 *до* 2π *и если при этомъ измѣненіи модуль maximum maximorum функціи*

$$\frac{t}{r} f(\zeta + re^{\omega i})$$

менѣе 1, *то уравненіе*

$$w = t f(\zeta + w), \tag{5}$$

будетъ имѣть одинъ только корень w_1, *модуль котораго менѣе даннаго значенія* r. *Если функція* $F(\zeta + w)$ *конечна, непрерывна и однозначна для всѣхъ значеній* w, *модули которыхъ менѣе* r_1, *то выраженіе* $F(\zeta + w_1)$ *будетъ разлагаться въ сходящійся рядъ по формулѣ:*

$$F(\zeta + w_1) = F(\zeta) + \frac{t}{1} F'(\zeta) f(\zeta) + \frac{t^2}{1.2} \frac{d\,[F'(\zeta) f^2(\zeta)]}{d\zeta} + \dots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\dots n} \frac{d^{n-1}\{F'(\zeta) f^n(\zeta)\}}{dz^{n-1}} + \dots, \tag{6}$$

при чемъ модули членовъ этого ряда будутъ удовлетворять неравенству:

$$\left| \frac{t^n}{1.2\dots n} \frac{d^{n-1}\{F'(\zeta) f^n(\zeta)\}}{d\zeta^{n-1}} \right| < \frac{|t^n|}{n} r.N.M^n,$$

гдѣ N *и* M *суть соотвѣтственно модули maximum maximorum функцій* $F'(\zeta + re^{\omega i})$ *и* $\frac{1}{r} f(\zeta + r e^{\omega i})$ *при возрастаніи* ω *отъ* 0 *до* 2π.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что при выполненіи ея условій

$$F(\zeta + w_1) = F(\zeta) + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{t^k}{1.2\dots k} \frac{d^{k-1}\{F'(\zeta) f^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + R_n, \tag{6'}$$

гдѣ

$$R_n = \frac{\lambda r N}{n} \cdot \frac{t^n M^n}{1-|t|M}, \quad |\lambda| < 1. \qquad (6'')$$

IV. Оцѣнка погрѣшностей разсматриваемыхъ ниже приближенныхъ выраженій интеграла (1) производится: 1) опредѣленіемъ предѣловъ погрѣшности и 2) указаніемъ порядка малости погрѣшности сравнительно съ малою величиною $\frac{1}{m}$. Этотъ порядокъ σ опредѣляется на основаніи слѣдующихъ условій: если величина $f(m)$ есть малая порядка σ относительно $\frac{1}{m}$, то предѣлъ выраженія $m^{\sigma+h} f(m)$ при возрастаніи m до $+\infty$ есть ∞ при произвольномъ *положительномъ* h и есть нуль при произвольномъ *отрицательномъ* h; если же предѣлъ выраженія $m^N f(m)$ при возрастаніи m до ∞ остается нулемъ при всякомъ конечномъ значеніи N, то порядокъ σ малой величины $f(m)$ есть $+\infty$. Напримѣръ, количество $A . m^{-\sigma}$, гдѣ A сохраняетъ при $m = \infty$ конечное и отличное отъ нуля значеніе, есть малое порядка σ. Количество $A . m^k . e^{-Bm^s}$, гдѣ A, B, k и s суть конечныя величины, при чемъ $B > 0$ и $s > 0$, есть малое порядка $\sigma = +\infty$. Исчисленіе порядковъ въ послѣдующемъ играетъ вообще важную роль.

§ 2. Обозначеніе интеграла, отнесеннаго къ данному пути интегрированія. Консервативная деформація пути интегрированія. Петли и обходы, образуемые деформируемымъ путемъ около особыхъ точекъ интегрируемой функціи.

n^0 2. Интегралъ вида (1), отнесенный къ непрерывной кривой abc, какъ къ пути интегрированія, обозначимъ черезъ $[abc]$, такъ что:

$$[abc] = \int_{(abc)} f(z)\, \psi^m(z)\, dz. \qquad (7)$$

Можно выбрать непрерывную функцію $\Phi(\theta)$ такъ, чтобы при возрастаніи дѣйствительнаго перемѣннаго θ отъ α до β изображеніе величины

$$z = \Phi(\theta) \qquad (8)$$

описывало путь *abc*. При этомъ условіи будемъ имѣть:

$$[abc] = \int_\alpha^\beta f(z)\,\psi^m(z)\,\frac{dz}{d\theta}\,d\theta. \qquad (9)$$

Будемъ *непрерывно* перемѣщать кривую *abc* такимъ образомъ, чтобы при всѣхъ положеніяхъ ея интегралъ $[abc]$ оставался неизмѣннымъ. Такое перемѣщеніе кривой *abc* назовемъ *консервативной деформаціей* пути интеграла $[abc]$. Если при такой деформаціи кривая $a'b'c'$ представляетъ одно изъ положеній движущейся кривой *abc*, то, по опредѣленію, будемъ имѣть:

$$[a\,b\,c] = [a'b'c']. \qquad (10)$$

Эти кривыя *abc* и $a'b'c'$ будемъ называть *эквивалентными*.

Теорія интеграловъ по комплексному перемѣнному обнаруживаетъ слѣдующіе два случая консервативной деформаціи пути *abc*: 1) когда при движеніи кривой *abc* точки *a* и *c* остаются *неподвижными*, 2) когда кривая *abc* не имѣетъ неподвижныхъ точекъ, но она *замкнутая* ($a = c$) и притомъ интегрируемая функція $f(z)\psi^m(z)$, при *любомъ* положеніи точки *a* на этой замкнутой кривой, въ началѣ и въ концѣ этого пути интегрированія имѣетъ одно и то же значеніе [1]). Ниже мы будемъ разумѣть подъ консервативной деформаціей только эти два случая и притомъ въ томъ и другомъ случаѣ перемѣщенія деформируемаго

---

[1]) Эти два случая можемъ обнаружить, между прочимъ, посредствомъ разсмотрѣнія варіаціи интеграла (9), имѣя въ виду, что при непрерывномъ измѣненіи пути *abc* функція $z = \Phi(\theta)$ терпитъ произвольныя безконечно малыя измѣненія. Варіація интеграла (9), какъ сохраняющаго постоянную величину, должна быть нулемъ, что приводитъ къ условію:

$$f(c)\,\psi^m(c)\,\delta c - f(a)\,\psi^m(a)\,\delta a = 0, \qquad (\alpha)$$

которое удовлетворяется въ двухъ случаяхъ: 1) когда $a = c$ и притомъ интегрируемая функція $f(z)\psi^m(z)$ въ началѣ и въ концѣ замкнутаго пути интеграціи принимаетъ одно и то же значеніе для произвольнаго положенія точки *a* на этой замкнутой кривой; 2) когда *a* и *c* неизмѣнны, такъ что $\delta a = \delta c = 0$. Кромѣ этихъ двухъ случаевъ возможны другіе, которые ниже устраняются и въ которыхъ *c* является функціей *a*, получаемой интегрированіемъ уравненія (α).

пути подчинимъ еще нѣкоторымъ условіямъ, необходимымъ для того, чтобы величина интеграла $[abc]$ при перемѣщеніи пути не измѣнилась *скачкомъ*. Эти условія состоятъ въ томъ, чтобы деформируемый путь не перескакивалъ чрезъ особыя точки интегрируемой функціи, каковой скачекъ вліяетъ, какъ извѣстно, на величину интеграла $[abc]$. Эти условія легко представить себѣ наглядно, если вообразимъ, что кривая abc движется въ плоскости комплекснаго перемѣннаго, какъ гибкая, растяжимая и сжимаемая *нить*, не встрѣчающая никакихъ препятствій, кромѣ задержекъ въ особыхъ точкахъ функціи $f(z)\psi'''(z)$. Эти задержки можемъ себѣ представить, воображая, что въ особыхъ точкахъ укрѣплены непроницаемыя для нити, твердыя, безконечно тонкія *иглы*, перпендикулярныя къ плоскости комплекснаго перемѣннаго z.

Если разсматриваемая гибкая нить abc, подчиняясь вышеуказаннымъ условіямъ, перейдетъ непрерывно изъ положенія $a\,b\,c$ въ положеніе $a'b'c'$, то, какъ извѣстно изъ теоріи интеграловъ по комплексному перемѣнному, равенство (10) будетъ имѣть силу.

Вышеуказанными условіями наглядно опредѣлена та консервативная деформація пути интегрированія, которою мы будемъ ниже широко пользоваться. Замѣтимъ, что, если при этой деформаціи гибкая нить встрѣтитъ иглу въ особой точкѣ ζ, то, зацѣпившись за иглу, нить отчасти совпадетъ съ кривою, по которой плоскость комплекснаго перемѣннаго пересѣкается съ поверхностью этой иглы. Такую часть нити назовемъ *петлей;* а если петля эта дѣлаетъ около иглы и, слѣдовательно, около точки ζ полные обороты, то каждый такой оборотъ назовемъ обходомъ около точки ζ. Если укрѣпленная въ точкѣ ζ игла круглая коническая, то часть пути интегрированія, образующая упомянутую петлю, будетъ вообще дугою $z'z''$ безконечно малой окружности $pqrp$, описанной изъ центра ζ. Если радіусъ этой окружности стремится къ нулю, то дуга $z'z''$ въ предѣлѣ сольется съ точкою ζ. Имѣя въ виду этотъ предѣльный случай, мы будемъ считать особыя точки, около которыхъ путь интегрированія образуетъ петли и обходы, принадлежа-

щими самому пути, на которомъ до перехода къ предѣлу эти точки лежать не могутъ.

§ 3. **Maximum maximorum модуля R функціи $\psi(z)$ для пути интегрированія. Основной путь интегрированія и его главныя точки. Величины K_1 и K_2 и ихъ значеніе. Первое главное условіе и особые случаи перваго рода. Второе главное условіе. Примѣръ опредѣленія основного пути и его главныхъ точекъ.**

n^0 3. Пусть R есть модуль функціи $\psi(z)$. Когда z описываетъ кривую abc, модуль R принимаетъ различныя значенія. Наибольшее изъ всѣхъ этихъ значеній есть *maximum maximorum* модуля R функціи $\psi(z)$, соотвѣтствующій данному пути abc. Обозначимъ этотъ maximum maximorum черезъ K.

Будемъ консервативно деформировать путь abc интеграціи, т. е. перемѣщать его при условіяхъ, указанныхъ въ предшествующемъ параграфѣ. Вышеуказанная величина K, представляющая maximum maximorum модуля R для пути abc, будетъ измѣняться при этой деформаціи названнаго пути. Будемъ эту деформацію выполнять такъ, чтобы модуль K *убывалъ* до тѣхъ поръ, пока дальнѣйшее уменьшеніе его сдѣлается невозможнымъ, т. е. когда K достигнетъ своего *minimum*'а K_1. Если при этомъ деформированный путь образуетъ петли около особыхъ точекъ функціи $f(z)\,\psi^m(z)$ и величина K_1 соотвѣтствуетъ точкамъ, пранадлежащимъ петлямъ, то пусть разсматриваемой деформаціей и уменьшеніемъ толщины соотвѣтствующихъ иглъ достигается тотъ предѣльный случай, когда эти петли обращаются въ точки и величина K_1 представляется какъ модуль функціи $\psi(z)$ для соотвѣтствующихъ особыхъ точекъ.

Предположимъ, что указанной деформаціей кривая abc приведена въ искомое положеніе для котораго величина K принимаетъ наименьшее значеніе K_1. Это положеніе обозначимъ чрезъ ABC.

Пусть при этомъ число n точекъ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ кривой ABC, для которыхъ модуль R принимаетъ значеніе K_1, сведено разсматриваемой деформаціей къ *наименьшему* значенію, такъ что всякое другое положеніе $A'B'C'$ консервативно де-

формируемой кривой abc, для котораго величина K принимаетъ наименьшее значеніе K_1, представляетъ кривую, непремѣнно проходящую чрезъ тѣ же точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. При такихъ условіяхъ кривую ABC назовемъ *основнымъ* путемъ интегрированія, при чемъ будемъ имѣть: $[a\,b\,c] = [ABC]$. Указанныя точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ этого основного пути назовемъ *главными*. Пусть эти точки слѣдуютъ другъ за другомъ въ такомъ порядкѣ, въ какомъ онѣ встрѣчаются при прохожденіи пути ABC. Имѣемъ:

$$|\psi(\zeta_1)| = |\psi(\zeta_2)| = \ldots = |\psi(\zeta_n)| = K_1,$$

гдѣ вообще $|\psi(\zeta)|$ означаетъ модуль количества $\psi(\zeta)$.

Для точекъ z основного пути ABC, не совпадающихъ съ главными его точками, будемъ имѣть: $|\psi(z)| < K_1$.

Главныя точки основнаго пути ABC, какъ увидимъ впослѣдствіи (въ § 8, n^0 25), частію принадлежатъ къ особымъ точкамъ функціи $f(z)\psi'^m(z)$, частію совпадаютъ съ точками, для которыхъ имѣетъ силу условіе: $\psi'(z) = 0$, частію могутъ соотвѣтствовать крайнимъ точкамъ A и C пути ABC. Внѣ этихъ случаевъ точка $\mathfrak{z}$ пути ABC не можетъ быть главною, ибо въ противномъ случаѣ, какъ будетъ доказано, соотвѣтствующій этой точкѣ $\mathfrak{z}$ maximum модуля R функціи $\psi(z)$ для точекъ z пути ABC можно *понизить*, прибѣгая съ этою цѣлью къ консервативной деформаціи.

n^0 4. Вообразимъ, всѣ *maximum*'ы, а также *minimum*'ы модуля R функціи $\psi(z)$ для точекъ z основного пути ABC. Къ этимъ значеніямъ модуля R присоединимъ его значенія, соотвѣтствующія: 1) корнямъ уравненія $\psi'(z) = 0$, лежащимъ на кривой ABC и не совпадающимъ съ главными точками, 2) тѣмъ не совпадающимъ съ главными точками особымъ точкамъ функціи $f(z)\psi'^m(z)$, вблизи которыхъ путь ABC образуетъ петли, касаясь иглъ, и 3) точкамъ A и C. Изъ всѣхъ указанныхъ значеній модуля R исключимъ тѣ, кои соотвѣтствуютъ главнымъ точкамъ, а изъ остальныхъ выберемъ *наибольшее*, которое обозначимъ чрезъ K_2. Очевидно, будемъ имѣть: $K_2 < K_1$.

Пусть величина $(K_2 : K_1)^m$ *есть малая, стремящаяся къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞, *и пусть порядокъ* σ *этой величины относительно* $\frac{1}{m}$ *будетъ:* $\sigma = +\infty$. Это условіе, въ выраженіи

котораго существенную роль играютъ количества K_1 и K_2, назовемъ *первымъ главнымъ условіемъ*.

Обозначимъ чрезъ x *дѣйствительную* величину, а чрезъ L_x кривую, точки z которой удовлетворяютъ уравненію:

$$|\psi(z)| = K_1 e^{-x}.$$

Семейство кривыхъ L_x будемъ называть *изомодулярными* кривыми. Очевидно, главныя точки лежатъ на изомодулярной кривой L_0.

Пусть $g = \lg(K_1 : K_2)$. Изъ опредѣленія величины K_2 слѣдуетъ, что данная вѣтвь основного пути ABC, идущая отъ главной точки ζ, должна непремѣнно достигать изомодулярной кривой L_g въ нѣкоторой точкѣ ξ'', послѣдовательно пересѣкаясь со всѣми изомодулярными кривыми L_x, для которыхъ параметръ x возрастаетъ отъ 0 до g. Такую часть $\zeta\xi''$ основного пути ABC назовемъ *главною*. Къ каждой главной точкѣ, не совпадающей съ A или C, прилегаетъ *двѣ* такихъ главныхъ части; если же главная точка совпадаетъ съ A или C, то къ ней прилегаетъ *одна* главная часть основного пути ABC.

Назовемъ главную часть $\zeta\xi''$ основного пути ABC *хорошо направленной*, если она на всемъ протяженіи своемъ пересѣкается съ каждою изомодулярною кривою L_x подъ угломъ φ, заключеннымъ въ предѣлахъ: $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$, гдѣ α есть данный *острый* уголъ, отличный отъ нуля. Если всѣ главныя части основного пути ABC хорошо направлены, то весь этотъ путь будемъ называть также *хорошо направленнымъ*. Если для всѣхъ точекъ главныхъ вѣтвей указанный сей часъ уголъ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то такой основной путь ABC назовемъ *ортогональнымъ*.

Хорошо направленный основной путь ABC при помощи консервативной деформаціи можетъ быть приведенъ въ такое положеніе, чтобы соотвѣтствующее ему количество K_2 принимало *наименьшее* значеніе. При этихъ условіяхъ основной путь ABC будемъ называть *критическимъ*; равнымъ образомъ будемъ называть *критическимъ* соотвѣтствующее ему значеніе K_2.

n° 5. Случаи, когда для *критическаго* основного пути ABC, отношеніе $K_2 : K_1$ вслѣдствіе измѣненія параметровъ, отъ которыхъ могутъ зависѣть функціи $\psi(z)$ и $f(z)$ и предѣлы A и C интеграціи, стремится къ 1 (при чемъ первое главное условіе

можетъ оказаться не выполняющимся), назовемъ *особыми перваго рода.*

Затрудненія, связанныя съ особыми случаями перваго рода, выясняются въ *пп*° 10 (пункт. II) и 12. Затѣмъ особые случаи перваго рода разсматриваются подробно въ § 6 (*пп*° 19, 20 и 21), гдѣ, между прочимъ, при введеніи *расширеннаго* понятія о главныхъ точкахъ будетъ измѣнено самое опредѣленіе величины K_2. Этимъ путемъ устраняются иногда затрудненія, связанныя съ особыми случаями перваго рода.

n° 6. Если точка z движется по пути ABC отъ главной точки ζ въ томъ или другомъ направленіи, то модуль функціи $\psi(z)$ въ началѣ движенія *убываетъ*, начиная отъ величины K_1 Если, слѣдовательно, положимъ:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)e^{-y}, \quad y = x + h\sqrt{-1}, \tag{10'}$$

гдѣ x и h суть дѣйствительныя величины, то при указанномъ сейчасъ движеніи точки z отъ точки ζ количество *x возрастаетъ* отъ нуля. Что касается величины h, которая также пусть измѣняется *отъ нуля*, то измѣненія ея при указанномъ движеніи точки z зависятъ еще отъ направленія пути ABC вблизи главной точки ζ. Слѣдовательно величина h можетъ быть варьируема, какъ произвольная функція x, ибо основной путь можетъ быть консервативно деформируемъ, *оставаясь основнымъ.* Располагая возможностью варьировать количество h, подчинимъ основной путь ABC слѣдующему условію.

Пусть на протяженіи данной вѣтви основного пути ABC, идущей отъ главной точки ζ, существуетъ точка z', отдѣляющая такую конечную часть $\zeta z'$ этой вѣтви, для точекъ z которой производная $\frac{dh}{dx}$ не выходитъ изъ данныхъ конечныхъ предѣловъ, а количество x постоянно возрастаетъ въ то время, когда z проходитъ кривую $\zeta z'$ отъ ζ до z'.

Это условіе назовемъ *вторымъ главнымъ условіемъ.* Замѣтимъ, что при выполненіи этого условія отношеніе $h:x$ для точекъ z кривой $\zeta z'$ также не выходитъ изъ нѣкоторыхъ конечныхъ предѣловъ, такъ какъ h есть интегралъ функціи $\frac{dh}{dx}$, обращающійся въ *нуль* при $x = 0$.

Разсматривая конформныя фигуры, описываемыя соотвѣтственными точками z и y, связанными уравненіями (10'), изъ подобія этихъ фигуръ въ безконечно малыхъ частяхъ убѣждаемся, что

$$\frac{dh}{dx} = ctg\,\varphi\,,$$

гдѣ φ есть уголъ при пересѣченіи вѣтви $\zeta z'$ съ изомодулярною кривою L_x. *Если, слѣдовательно, второе главное условіе выполняется для всей главной части $\zeta\xi''$ (см. n^0 4), такъ что можемъ положить: $z' = \xi''$, то эта главная часть должна быть хорошо направленною.*

Второе главное условіе, какъ увидимъ ниже (въ n^0 9), играетъ важную роль при составленіи формулъ для оцѣнки предѣловъ той группы членовъ погрѣшности приближеннаго выраженія интеграла $[ABC]$, которая не зависитъ отъ вышеуказаннаго отношенія $(K_2 : K_1)^m$ (см. n^0 4).

n^0 7. Примѣръ. Приведемъ примѣръ опредѣленія основного пути интегрированія, разсмотрѣвъ одинъ случай, имѣющій важное значеніе въ Теоріи Вѣроятностей.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ будутъ m случайныхъ независимыхъ величинъ. Введемъ обозначенія:

$$\varphi_1(r) = \Sigma p_1 r^{x_1}\,, \varphi_2(r) = \Sigma p_2 r^{x_2}\,, \ldots, \varphi_m(r) = \Sigma p_m r^{x_m}\,, \qquad (10'')$$

гдѣ вообще Σpr^x есть сумма произведеній вѣроятности p перемѣннаго x на выраженіе r^x, распространенная на всѣ значенія x. Будемъ имѣть: $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = \ldots = \varphi_m(1) = 1$.

Положимъ далѣе:

$$F(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r) \ldots \varphi_m(r). \qquad (11)$$

Разлагая функцію $F(r)$ по степенямъ r, будемъ имѣть:

$$F(r) = \Sigma_n P_n r^n, \qquad (11')$$

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \qquad (11'')$$

гдѣ сумма Σ_n распространяется на всѣ значенія n вида (11'').

Коэффиціентъ P_n въ формулѣ (11') представляетъ вѣроятность того, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ получитъ данное значеніе n.

Предположимъ далѣе, что перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_m$ могутъ имѣть лишь *цѣлыя* значенія, при чемъ и числа n вида (11″) будутъ цѣлыми. Этотъ случай *основной*, отъ котораго потомъ можно будетъ перейти къ любымъ дѣйствительнымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \psi^m(z)\,\frac{dz}{z}, \qquad (11''')$$

гдѣ путь L интеграціи есть замкнутая кривая, окружающая начало O координатъ, и

$$\psi(z) = \{F(z)z^{-n}\}^{\frac{1}{m}} = \{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)z^{-n}\}^{\frac{1}{m}}.$$

Приближенное вычисленіе вѣроятности P_n того, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ приметъ данное значеніе n, сведено, такимъ образомъ, къ приближенному вычисленію интеграла вида (1).

Примемъ за путь L интеграціи окружность, описанную изъ центра O радіусомъ r. Для точекъ этой окружности будемъ имѣть: $z = re^{\theta i}$ и

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi^m(re^{\theta i})\,d\theta.$$

Такъ какъ коэффиціенты полинома $f(z)$, опредѣляемаго равенствомъ (11′), положительные, то при измѣненіи θ отъ $-\pi$ до $+\pi$ модуль R количества $\psi(re^{\theta i})$ получаетъ наибольшее значеніе, когда $\theta = 0$, т. е. *maximum maximorum* модуля R есть $K = \psi(r)$. Этотъ maximum модуля R соотвѣтствуетъ пересѣченію окружности L съ положительною осью плоскости комплекснаго перемѣннаго z, т. е. соотвѣтствуетъ изображенію величины $z_0 = r$. Но если общій наибольшій дѣлитель D цѣлыхъ чиселъ n вида (11″) отличается отъ 1, то функція $\psi(z)$ обладаетъ свойствомъ, которое выражается равенствами:

$$\psi(z) = \psi(\alpha z) = \psi(\alpha^2 z) = \ldots = \psi(\alpha^{D-1} z),$$

гдѣ

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{D}}.$$

Поэтому модуль R функціи $\psi(z)$ принимаетъ наибольшее значеніе $K=\psi(r)$ въ D точкахъ окружности L, именно:

$$z_0 = r,\ z_1 = \alpha r,\ \ldots,\ z_{D-1} = \alpha^{D-1} r.$$

Эти точки дѣлятъ окружность L на равныя части.

Будемъ затѣмъ консервативно деформировать путь L интеграціи. Пусть эта деформація состоитъ въ томъ, что измѣняется радіусъ r окружности L. При этомъ величина K будетъ измѣняться и достигнетъ своего minimum'а K_1 при значеніи $r=\rho$, удовлетворяющемъ условіямъ:

$$\psi'(\rho)=0,\quad \psi''(\rho)>0.$$

Этому радіусу $r=\rho$ соотвѣтствуетъ окружность L, которую можемъ принять за основной путь Λ интеграціи [1]). Интегрируемая функція на этомъ пути не имѣетъ никакихъ особыхъ точекъ.

Главныя точки ζ этого основного пути изображаютъ величины:

$$\zeta_0 = \rho,\ \zeta_1 = \rho\alpha,\ \ldots,\ \zeta_{D-1} = \rho\alpha^{D-1},$$

удовлетворяющія уравненію: $\psi'(z)=0$. Точкамъ этимъ соотвѣтствуетъ величина $K_1=\psi(\rho)$.

Легко удостовѣриться въ выполненіи вблизи главныхъ точекъ втораго главнаго условія для полученнаго основного пути Λ. Перейдемъ къ опредѣленію величины K_2 и къ разсмотрѣнію перваго главнаго условія для того же основного пути.

---

[1]) При разсматриваемомъ изысканіи нужно имѣть въ виду замѣчанія, сдѣланныя въ главѣ II статьи „Рядъ Лагранжа", гдѣ выяснено, что, пользуясь круговымъ путемъ L и измѣняя его радіусъ r, можно встрѣтить случаи, когда minimum наибольшаго значенія K не совпадаетъ съ величиною K_1, соотвѣтствующею основному пути Λ. Однако въ настоящей задачѣ, благодаря положительнымъ коеффиціентамъ второй части равенства (11'), подобный случай представиться не можетъ.

Измѣняя θ отъ $-\pi$ до $+\pi$, разсмотримъ maximum'ы и minimum'ы модуля R функціи $\psi(\rho e^{\theta i})$. Для этихъ значеній модуля R должно выполняться условіе:

$$\frac{dR}{d\theta} = 0. \tag{11'''a}$$

Полагая $\rho e^{\theta i} = z$ и дифференцируя равенство

$$\psi(z) = Re^{\Omega i}$$

по перемѣнному θ, убѣждаемся, что $\dfrac{dR}{d\theta}$ есть дѣйствительная часть количества:

$$\frac{Riz\,\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Слѣдовательно условіе (11'''a) удовлетворяется въ томъ лишь случаѣ, если выраженіе

$$\frac{z\,\psi'(z)}{\psi(z)}$$

есть *дѣйствительное* количество или *нуль* [въ послѣднемъ случаѣ $\psi'(z) = 0$].

Обратимъ вниманіе на одну группу точекъ z окружности Λ, для которыхъ $\psi'(z)$ вообще не есть нуль и выраженіе

$$\frac{z\,\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{m}\left\{\frac{z\,\varphi'_1(z)}{\varphi_1(z)} + \ldots + \frac{z\,\varphi'_m(z)}{\varphi_m(z)} - n\right\}$$

есть дѣйствительное количество. Такъ какъ всѣ коеффиціенты функцій $\varphi_k(z)$ дѣйствительные, то указанное сейчасъ выраженіе будетъ дѣйствительнымъ и вообще отличнымъ отъ нуля при условіи, когда

$$z^D = -\rho^D,$$

гдѣ D есть общій наибольшій дѣлитель всѣхъ значеній перемѣнныхъ x, совпадающій, очевидно, съ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ всѣхъ значеній n. Для этихъ точекъ z, кои дѣлятъ

окружность Λ на D равныхъ частей, дѣля въ то же время каждую изъ дугъ $\zeta_k \zeta_{k+1}$ пополамъ, модуль R функціи $\psi(z)$ удовлетворяетъ условію ($11''' a$) и пріобрѣтаетъ значеніе:

$$R_0 = | \psi(\rho e^{\frac{\pi i}{D}}) | .$$

Къ этимъ точкамъ окружности Λ нужно присоединить другія ея точки z, для которыхъ количество $\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$ есть дѣйствительная величина или нуль. Нужно принять во вниманіе всѣ эти точки z окружности Λ, кромѣ совпадающихъ съ главными точками, и найти соотвѣтствующія имъ значенія модуля R функціи $\psi(z)$, а затѣмъ выбрать *наибольшее* изъ этихъ значеній, которое обозначимъ чрезъ R_1. Вмѣстѣ съ тѣмъ количество K_1 должно совпадать съ R_1.

Если не имѣется на окружности Λ другихъ точекъ, обращающихъ количество $\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$ въ нуль или дѣйствительную величину, кромѣ точекъ, для которыхъ $z^D = \pm \rho^D$, то количество K_2 въ такомъ случаѣ представится такъ:

$$K_2 = R_0 = | \psi(\rho e^{\frac{\pi i}{D}}) | .$$

Очевидно, $K_2 < K_1$, и поэтому выраженіе $(K_2 : K_1)^m$ вообще стремится къ нулю порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$, т. е. первое главное условіе вообще выполняется. Но бываютъ, однако, исключенія, соотвѣтствующія особымъ случаямъ перваго рода.

Приближенное вычисленіе интеграла ($11'''$) послужитъ пунктомъ отправленія въ моей послѣдующей статьѣ для полученія тѣхъ формъ приближенной величины вѣроятности P_n, кои указаны въ моемъ мемуарѣ: «*Общія свойства массовыхъ независимыхъ случайныхъ явленій въ связи съ приближеннымъ вычисленіемъ функцій весьма большихъ чиселъ*», — формъ, различающихся какъ видомъ, такъ и степенью точности, и даю-

щихъ соотвѣтствующему отдѣлу Теоріи Вѣроятностей бо́льшую полноту и гибкость.

Замѣтимъ, что приближенное вычисленіе вѣроятности P_n, можно связать еще съ вычисленіемъ далекаго члена ряда Лагранжа, каковое вычисленіе разсматривалось въ главѣ III моей статьи: *«Рядъ Лагранжа»*. Эта связь настоящаго вопроса съ рядомъ Лагранжа будетъ выяснена ниже (въ n^0 37), а теперь замѣтимъ только слѣдующее. Если вышеуказанныя функціи $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r), \ldots,$ $\varphi_m(r)$ суть алгебраическіе полиномы, то при цѣлыхъ значеніяхъ случайныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ равенство (11‴) представится такъ:

$$P_n = \frac{\Phi^{(n+s)}(0)}{1\ 2.\ .(n+s)}, \quad \Phi(r) = r^s F(r), \qquad (11''' b)$$

гдѣ $F(r)$ есть вышеуказанная функція, опредѣляемая равенствомъ (11), и s есть число, выбранное такъ, что $\Phi(0)$ имѣетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля.

§ 4. **Звенья основного пути интегрированія, ихъ роды и ихъ второстепенныя части. Основной процессъ вычисленія для звеньевъ перваго рода при выполненіи обоихъ главныхъ условій. Отдѣленіе отъ звеньевъ второстепенныхъ частей; цѣль этого отдѣленія. Вычисленіе безъ посредства отдѣленія второстепенныхъ частей. Дѣленіе членовъ погрѣшности на двѣ категоріи и мѣра быстроты убыванія членовъ первой категоріи. Членъ второй категоріи и связанные съ нимъ особые случаи второго рода. Примѣненіе ряда Лагранжа съ теоремою Коши-Руше и ряда Маклорена. Вычисленіе для звеньевъ второго рода посредствомъ приведенія къ основному процессу для звеньевъ перваго рода.**

n^0 8. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ будутъ указанныя выше (въ n^0 3) главныя точки основнаго пути ABC.

Если изъ этихъ точекъ какая либо точка ζ_k совпадаетъ съ особою точкою функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, то, собственно говоря, точка ζ_k не лежитъ на кривой ABC, но помѣщается безконечно близко къ пути ABC, который, какъ это пояснено въ n^0 2

и выяснится еще полнѣе въ § 9 (n^0 28), образуетъ вблизи точки ζ_k петлю, т. е. кривую, совпадающую съ дугою $z'_k\, z_k''$ безконечно малой окружности $p_k\, q_k\, r_k\, p_k$, описанной изъ центра ζ_k. Эта дуга $z'_k\, z_k''$ сливается съ точкой ζ_k въ предѣлѣ, когда радіусъ окружности $p_k\, q_k\, r_k\, p_k$ обращается въ нуль. Ниже мы часто будемъ имѣть въ виду этотъ предѣльный случай, при чемъ въ этомъ случаѣ мы будемъ обозначать чрезъ ζ_k не только центръ названной окружности, но и дугу $z'_k\, z''_k$. Если предположимъ этотъ предѣльный случай для всѣхъ главныхъ точекъ пути интегрированія, совпадающихъ съ особыми точками функціи $f(z)\ \psi'''(z)$, то всѣ точки $\zeta_1, \zeta_2 \ldots, \zeta_n$ окажутся лежащими на самомъ пути ABC, при чемъ для всѣхъ точекъ z этого пути, не совпадающихъ съ главными точками $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, должно имѣть силу неравенство:

$$|\psi(z)| < K_1. \tag{12}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ, обращаясь къ величинѣ K_2, указанной въ n^0 4, убѣждаемся, что на протяженіи части $\zeta_k\, \zeta_{k+1}$ пути ABC должна лежать по крайней мѣрѣ одна точка ξ_k, для которой имѣетъ силу неравенство:

$$|\psi(\xi_k)| \leqq K_2. \tag{13}$$

Выбравъ такія точки ξ_k для каждой части $\zeta_k\, \zeta_{k+1}$ основного пути ABC, будемъ имѣть рядъ точекъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, удовлетворяющихъ условію (13).

Относительно крайнихъ точекъ A и C пути ABC сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія, вытекающія изъ условій построенія основного пути. Въ случаѣ невозможности перемѣщать эти точки при консервативной деформаціи пути ABC, каждая изъ нихъ должна оказаться либо въ числѣ главныхъ точекъ, либо въ числѣ точекъ z, удовлетворяющихъ неравенству: $|\psi(z)| \leqq K_2$, т. е. для каждой изъ точекъ A и C, если она не будетъ главною, имѣетъ силу соотвѣтствующее изъ неравенствъ:

$$|\psi(A)| \leqq K_2 \text{ и } |\psi(C)| \leqq K_2. \tag{14}$$

Если же точки A и C другъ съ другомъ совпадаютъ и при консервативной деформаціи могутъ быть передвигаемы, то пусть этою деформаціей онѣ приведены въ такое положеніе, чтобы непремѣнно имѣли силу неравенства (14).

Замѣтивъ это, будемъ причислять каждую изъ точекъ A и C, для которой осуществляется соотвѣтствующее изъ неравенствъ (14), къ вышеуказаннымъ точкамъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, полагая $A=\xi_0$, если выполняется первое изъ неравенствъ (14), и полагая также $C=\xi_n$, если выполняется второе изъ неравенствъ (14). Если же первое изъ неравенствъ (14) не выполняется, то будемъ имѣть: $A=\zeta_1$, и, подобнымъ образомъ, при невыполненіи второго изъ неравенствъ (14) будемъ имѣть: $C=\zeta_n$.

Вышеуказанныя точки ξ, удовлетворяющія неравенствамъ вида: $|\psi(\xi)| \leqq K_2$, вмѣстѣ съ главными точками ζ раздѣляютъ весь основной путь ABC на части: $A\zeta_1$, $\zeta_1\xi_1$, $\xi_1\zeta_2$, $\zeta_2\xi_2, \ldots$, $\xi_{n-1}\zeta_n$, $\zeta_n C$, которыя назовемъ *звеньями перваго рода*. Звенья $A\zeta_1$ и $\zeta_n C$ (иначе: $\xi_0\zeta_1$ и $\zeta_n\xi_n$) существуютъ лишь при выполненіи соотвѣтствующихъ неравенствъ (14).

Очевидно, каждое звено перваго рода, представляетъ собою часть $\zeta\xi$ основного пути, на протяженіи которой нѣтъ главныхъ точекъ этого пути, кромѣ точки ζ, которую назовемъ также главною точкою разсматриваемаго звена.

Ниже подробно разсматривается приближенное вычисленіе интеграла $[\zeta\xi]$, отнесеннаго къ части $\zeta\xi$ основнаго пути ABC, которая обладаетъ всѣми свойствами звена перваго рода, и этотъ процессъ вычисленія трактуется, какъ основной, къ которому приводится задача о приближенномъ вычисленіи интеграловъ вида (1).

Однако, этотъ основной процессъ примѣнимъ къ интегралу $[\zeta\xi]$ лишь въ томъ случаѣ, если для главной точки ζ звена $\zeta\xi$ функція $f(z)$ сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность, но порядка менѣе 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$. Въ противномъ случаѣ прежде примѣненія этого основного процесса необходимо еще предварительное преобразованіе интегрируемой функціи, при чемъ путь ABC нужно сначала подраздѣлить на *звенья второго рода*. На такія звенья путь ABC

Разсматривая конформныя фигуры, описываемыя соотвѣтственными точками z и y, связанными уравненіями (10′), изъ подобія этихъ фигуръ въ безконечно малыхъ частяхъ убѣждаемся, что

$$\frac{dh}{dx} = ctg\,\varphi\,,$$

гдѣ φ есть уголъ при пересѣченіи вѣтви $\zeta z'$ съ изомодулярною кривою L_x. *Если, слѣдовательно, второе главное условіе выполняется для всей главной части $\zeta\xi''$ (см. n^0 4), такъ что можемъ положить: $z' = \xi''$, то эта главная часть должна быть хорошо направленною.*

Второе главное условіе, какъ увидимъ ниже (въ n^0 9), играетъ важную роль при составленіи формулъ для оцѣнки предѣловъ той группы членовъ погрѣшности приближеннаго выраженія интеграла $[ABC]$, которая не зависитъ отъ вышеуказаннаго отношенія $(K_2 : K_1)^m$ (см. n^0 4).

n^0 7. Примѣръ. Приведемъ примѣръ опредѣленія основного пути интегрированія, разсмотрѣвъ одинъ случай, имѣющій важное значеніе въ Теоріи Вѣроятностей.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ будутъ m случайныхъ независимыхъ величинъ. Введемъ обозначенія:

$$\varphi_1(r) = \Sigma p_1 r^{x_1}\,,\ \varphi_2(r) = \Sigma p_2 r^{x_2}\,, \ldots, \varphi_n(r) = \Sigma p_m r^{x_m}\,, \qquad (10'')$$

гдѣ вообще Σpr^x есть сумма произведеній вѣроятности p перемѣннаго x на выраженіе r^x, распространенная на всѣ значенія x. Будемъ имѣть: $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = \ldots = \varphi_m(1) = 1$.

Положимъ далѣе:

$$F(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r) \ldots \varphi_m(r). \qquad (11)$$

Разлагая функцію $F(r)$ по степенямъ r, будемъ имѣть:

$$F(r) = \Sigma_n P_n r^n, \qquad (11')$$

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \qquad (11'')$$

гдѣ сумма Σ_n распространяется на всѣ значенія n вида (11″).

Коэффиціентъ P_n въ формулѣ (11′) представляетъ вѣроятность того, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ получитъ данное значеніе n.

Предположимъ далѣе, что перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_m$ могутъ имѣть лишь *цѣлыя* значенія, при чемъ и числа n вида (11″) будутъ цѣлыми. Этотъ случай *основной*, отъ котораго потомъ можно будетъ перейти къ любымъ дѣйствительнымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \psi^m(z)\frac{dz}{z}, \qquad (11''')$$

гдѣ путь L интеграціи есть замкнутая кривая, окружающая начало O координатъ, и

$$\psi(z) = \{F(z)z^{-n}\}^{\frac{1}{m}} = \{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)z^{-n}\}^{\frac{1}{m}}.$$

Приближенное вычисленіе вѣроятности P_n того, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ приметъ данное значеніе n, сведено, такимъ образомъ, къ приближенному вычисленію интеграла вида (1).

Примемъ за путь L интеграціи окружность, описанную изъ центра O радіусомъ r. Для точекъ этой окружности будемъ имѣть: $z = re^{\theta i}$ и

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi^m(re^{\theta i})\,d\theta.$$

Такъ какъ коеффиціенты полинома $f(z)$, опредѣляемаго равенствомъ (11′), положительные, то при измѣненіи θ отъ $-\pi$ до $+\pi$ модуль R количества $\psi(re^{\theta i})$ получаетъ наибольшее значеніе, когда $\theta = 0$, т. е. *maximum maximorum* модуля R есть $K = \psi(r)$. Этотъ maximum модуля R соотвѣтствуетъ пересѣченію окружности L съ положительною осью плоскости комплекснаго перемѣннаго z, т. е. соотвѣтствуетъ изображенію величины $z_0 = r$. Но если общій наибольшій дѣлитель D цѣлыхъ чиселъ n вида (11″) отличается отъ 1, то функція $\psi(z)$ обладаетъ свойствомъ, которое выражается равенствами:

$$\psi(z) = \psi(\alpha z) = \psi(\alpha^2 z) = \ldots = \psi(\alpha^{D-1}z),$$

гдѣ

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{D}}.$$

Поэтому модуль R функціи $\psi(z)$ принимаетъ наибольшее значеніе $K=\psi(r)$ въ D точкахъ окружности L, именно:

$$z_0=r,\ z_1=\alpha r,\ \ldots,\ z_{D-1}=\alpha^{D-1}r.$$

Эти точки дѣлятъ окружность L на равныя части.

Будемъ затѣмъ консервативно деформировать путь L интеграціи. Пусть эта деформація состоитъ въ томъ, что измѣняется радіусъ r окружности L. При этомъ величина K будетъ измѣняться и достигнетъ своего minimum'а K_1 при значеніи $r=\rho$, удовлетворяющемъ условіямъ:

$$\psi'(\rho)=0,\quad \psi''(\rho)>0.$$

Этому радіусу $r=\rho$ соотвѣтствуетъ окружность L, которую можемъ принять за основной путь Λ интеграціи [1]). Интегрируемая функція на этомъ пути не имѣетъ никакихъ особыхъ точекъ.

Главныя точки ζ этого основного пути изображаютъ величины:

$$\zeta_0=\rho,\ \zeta_1=\rho\alpha,\ \ldots,\ \zeta_{D-1}=\rho\alpha^{D-1},$$

удовлетворяющія уравненію: $\psi'(z)=0$. Точкамъ этимъ соотвѣтствуетъ величина $K_1=\psi(\rho)$.

Легко удостовѣриться въ выполненіи вблизи главныхъ точекъ втораго главнаго условія для полученнаго основного пути Λ. Перейдемъ къ опредѣленію величины K_2 и къ разсмотрѣнію перваго главнаго условія для того же основного пути.

---

[1]) При разсматриваемомъ изысканіи нужно имѣть въ виду замѣчанія, сдѣланныя въ главѣ II статьи „Рядъ Лагранжа", гдѣ выяснено, что, пользуясь круговымъ путемъ L и измѣняя его радіусъ r, можно встрѣтить случаи, когда minimum наибольшаго значенія K не совпадаетъ съ величиною K_1, соотвѣтствующею основному пути Λ. Однако въ настоящей задачѣ, благодаря положительнымъ коэффиціентамъ второй части равенства (11'), подобный случай представиться не можетъ.

Измѣняя θ отъ $-\pi$ до $+\pi$, разсмотримъ maximum'ы и minimum'ы модуля R функціи $\psi(\rho e^{\theta i})$. Для этихъ значеній модуля R должно выполняться условіе:

$$\frac{dR}{d\theta}=0. \qquad (11'''a)$$

Полагая $\rho e^{\theta i}=z$ и дифференцируя равенство

$$\psi(z)=Re^{\Omega i}$$

по перемѣнному θ, убѣждаемся, что $\frac{dR}{d\theta}$ есть дѣйствительная часть количества:

$$\frac{Riz\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Слѣдовательно условіе $(11'''a)$ удовлетворяется въ томъ лишь случаѣ, если выраженіе

$$\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$$

есть *дѣйствительное* количество или *нуль* [въ послѣднемъ случаѣ $\psi'(z)=0$].

Обратимъ вниманіе на одну группу точекъ z окружности Λ, для которыхъ $\psi'(z)$ вообще не есть нуль и выраженіе

$$\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}=\frac{1}{m}\left\{\frac{z\varphi'_1(z)}{\varphi_1(z)}+\ldots+\frac{z\varphi'_m(z)}{\varphi_m(z)}-n\right\}$$

есть дѣйствительное количество. Такъ какъ всѣ коеффиціенты функцій $\varphi_k(z)$ дѣйствительные, то указанное сейчасъ выраженіе будетъ дѣйствительнымъ и вообще отличнымъ отъ нуля при условіи, когда

$$z^D=-\rho^D,$$

гдѣ D есть общій наибольшій дѣлитель всѣхъ значеній перемѣнныхъ x, совпадающій, очевидно, съ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ всѣхъ значеній n. Для этихъ точекъ z, кои дѣлятъ

окружность Λ на D равныхъ частей, дѣля въ то же время каждую изъ дугъ $\zeta_k \zeta_{k+1}$ пополамъ, модуль R функціи $\psi(z)$ удовлетворяетъ условію ($11''' a$) и пріобрѣтаетъ значеніе:

$$R_0 = | \psi(\rho e^{\frac{\pi i}{D}}) | .$$

Къ этимъ точкамъ окружности Λ нужно присоединить другія ея точки z, для которыхъ количество $\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$ есть дѣйствительная величина или нуль. Нужно принять во вниманіе всѣ эти точки z окружности Λ, кромѣ совпадающихъ съ главными точками, и найти соотвѣтствующія имъ значенія модуля R функціи $\psi(z)$, а затѣмъ выбрать *наибольшее* изъ этихъ значеній, которое обозначимъ чрезъ R_1. Вмѣстѣ съ тѣмъ количество K_1 должно совпадать съ R_1.

Если не имѣется на окружности Λ другихъ точекъ, обращающихъ количество $\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$ въ нуль или дѣйствительную величину, кромѣ точекъ, для которыхъ $z^D = \pm \rho^D$, то количество K_2 въ такомъ случаѣ представится такъ:

$$K_2 = R_0 = | \psi(\rho e^{\frac{\pi i}{D}}) | .$$

Очевидно, $K_2 < K_1$, и поэтому выраженіе $(K_2 : K_1)^m$ вообще стремится къ нулю порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$, т. е. первое главное условіе вообще выполняется. Но бываютъ, однако, исключенія, соотвѣтствующія особымъ случаямъ перваго рода.

Приближенное вычисленіе интеграла ($11'''$) послужитъ пунктомъ отправленія въ моей послѣдующей статьѣ для полученія тѣхъ формъ приближенной величины вѣроятности P_n, кои указаны въ моемъ мемуарѣ: «*Общія свойства массовыхъ независимыхъ случайныхъ явленій въ связи съ приближеннымъ вычисленіемъ функцій весьма большихъ чиселъ*», — формъ, различающихся какъ видомъ, такъ и степенью точности, и даю-

щихъ соотвѣтствующему отдѣлу Теоріи Вѣроятностей бо́льшую полноту и гибкость.

Замѣтимъ, что приближенное вычисленіе вѣроятности P_n, можно связать еще съ вычисленіемъ далекаго члена ряда Лагранжа, каковое вычисленіе разсматривалось въ главѣ III моей статьи: «*Рядъ Лагранжа*». Эта связь настоящаго вопроса съ рядомъ Лагранжа будетъ выяснена ниже (въ n^0 37), а теперь замѣтимъ только слѣдующее. Если вышеуказанныя функціи $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r), \ldots, \varphi_m(r)$ суть алгебраическіе полиномы, то при цѣлыхъ значеніяхъ случайныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ равенство (11‴) представится такъ:

$$P_n = \frac{\Phi^{(n+s)}(0)}{1\,2\ldots(n+s)}, \quad \Phi(r) = r^s F(r), \qquad (11''' b)$$

гдѣ $F(r)$ есть вышеуказанная функція, опредѣляемая равенствомъ (11), и s есть число, выбранное такъ, что $\Phi(0)$ имѣетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля.

§ 4. **Звенья основного пути интегрированія, ихъ роды и ихъ второстепенныя части. Основной процессъ вычисленія для звеньевъ перваго рода при выполненіи обоихъ главныхъ условій. Отдѣленіе отъ звеньевъ второстепенныхъ частей; цѣль этого отдѣленія. Вычисленіе безъ посредства отдѣленія второстепенныхъ частей. Дѣленіе членовъ погрѣшности на двѣ категоріи и мѣра быстроты убыванія членовъ первой категоріи. Членъ второй категоріи и связанные съ нимъ особые случаи второго рода. Примѣненіе ряда Лагранжа съ теоремою Коши-Руше и ряда Маклорена. Вычисленіе для звеньевъ второго рода посредствомъ приведенія къ основному процессу для звеньевъ перваго рода.**

n^0 8. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ будутъ указанныя выше (въ n^0 3) главныя точки основнаго пути ABC.

Если изъ этихъ точекъ какая либо точка ζ_k совпадаетъ съ особою точкою функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, то, собственно говоря, точка ζ_k не лежитъ на кривой ABC, но помѣщается безконечно близко къ пути ABC, который, какъ это пояснено въ n^0 2

I. Предположимъ, что всѣ показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ дѣйствительные, расположенные въ восходящемъ порядкѣ: $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s$.

Изъ равенствъ (29) и (29′) видно, что при дѣйствительномъ α

$$\left|\int\limits_{(\eta\infty)} e^{-my} y^{\alpha} dy\right| < \int\limits_0^{+\infty} e^{-m(x_0+u)} \left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^{\alpha} du. \qquad (30)$$

Если $\alpha < 0$, то при $u > 0$ имѣемъ:

$$\left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^{\alpha} < \left(\sqrt{x_0^2+h_0^2}\right)^{\alpha} = |\eta^{\alpha}|$$

и, слѣдовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-mu} \left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^{\alpha} du < |\eta^{\alpha}| \int\limits_0^{+\infty} e^{-mu} du = \frac{|\eta^{\alpha}|}{m}. \qquad (30')$$

Отсюда и изъ неравенства (30) убѣждаемся, что равенство (27′) можетъ быть представлено такъ:

$$\delta_k = -\int\limits_{(\eta\infty)} e^{-my} y^{\alpha_k} dy = \frac{\lambda}{m} \eta^{\alpha_k} e^{-m\eta}, \quad \alpha_k < 0, \qquad (31)$$

гдѣ λ есть количество, модуль котораго менѣе 1.

Если $\alpha \geqq 0$, то при $u > 0$ имѣемъ:

$$\left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^{\alpha} < (x_0+u+h_1)^{\alpha}, \qquad (32)$$

гдѣ $h_1 = |h_0| = |\eta - x_0|$. Вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-mu} \left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^{\alpha} du < \int\limits_0^{\infty} e^{-mu} (x_0+u+h_1)^{\alpha} du. \qquad (33)$$

Разсматривая разложеніе функціи

$$e^{\frac{u}{x_0 + h_1}}$$

по степенямъ u, убѣждаемся, что при $u > 0$ имѣетъ силу неравенство:

$$x_0 + u + h_1 < (x_0 + h_1)\, e^{\frac{u}{x_0 + h_1}}.$$

Отсюда и изъ неравенства (33) слѣдуетъ, что

$$\int_0^\infty e^{-mu}\left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^\alpha du < (x_0+h_1)^\alpha \int_0^\infty e^{-\left(m-\frac{\alpha}{x_0+h_1}\right)u}\, du.$$

Иначе, при $\alpha \geqq 0$ будемъ имѣть:

$$\int_0^\infty e^{-mu}\left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^\alpha du < \frac{(x_0+h_1)^\alpha}{m - \frac{\alpha}{x_0+h_1}}. \quad (33')$$

Принимая во вниманіе это послѣднее неравенство и неравенство (30), приводимъ равенство (27′) къ виду:

$$\delta_k = -\int_{(\eta\infty)} e^{-mu}\, y^{\alpha_k}\, dy = \frac{\lambda (x_0+h_1)^{\alpha_k}\, e^{-m\eta}}{m - \frac{\alpha_k}{x_0+h_1}},\ \alpha_k \geqq 0, \quad (34)$$

гдѣ $h_1 = |\eta - x_0|$ и λ есть количество, модуль котораго менѣе 1.

Займемся теперь величиною ρ_s, которая представляется равенствомъ (24). При составленіи формулъ для оцѣнки предѣловъ количества ρ_s важную роль играетъ второе главное условіе, указанное въ § 3 (n^0 6). Пусть условіе это распространяется на

всѣ точки z части $\zeta\xi$ основного пути ABC, такъ что можемъ положить: $z' = \xi$. Полагаемъ въ интегралѣ (24):

$$y = x + hi, \tag{35}$$

гдѣ x и h суть дѣйствительныя перемѣнныя величины.

Изъ допущеннаго нами втораго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 6), слѣдуетъ, что съ передвиженіемъ точки y по кривой 0η отъ точки 0 до точки η количество x *постоянно возрастаетъ* отъ 0 до x_0. При такихъ условіяхъ можемъ въ интегралѣ (24) преобразовать перемѣнное y, взявъ x за новое перемѣнное. Получимъ:

$$\rho_s = \int_0^{x_0} e^{-m(x+hi)}\, x^{\alpha_s}\, M\, dx, \tag{36}$$

$$M = \left(1 + \frac{hi}{x}\right)^{\alpha_s} . B_s . \left(1 + \frac{dh}{dx} i\right). \tag{37}$$

Выраженія $\frac{h}{x}$ и $\frac{dh}{dx}$ по допущенному нами второму главному условію, указанному въ § 3 (n^0 6), сохраняютъ значенія, не выходящія изъ конечныхъ предѣловъ. При выполненіи какъ этого условія, такъ вышеуказанныхъ условій относительно функціи B_s, выраженіе M, опредѣляемое равенствомъ (37), въ предѣлахъ интеграла (36) также сохраняетъ конечное значеніе. Пусть μ есть наибольшее значеніе модуля M при возрастаніи x отъ 0 до x_0, такъ что $\mu \geqq |M|$. Отсюда и изъ равенства (36) слѣдуетъ, что

$$|\rho_s| < \mu \int_0^{x_0} e^{-mx}\, x^{\alpha_s}\, dx. \tag{37'}$$

Иначе

$$\rho_s = \lambda\mu \int_0^{x_0} e^{-mx}\, x^{\alpha_s}\, dx = \frac{\lambda' \mu \Gamma(1 + \alpha_s)}{m^{1+\alpha_s}}, \tag{38}$$

$$|\lambda'| < |\lambda| < 1.$$

При помощи равенствъ (28), (28′), (31), (34) и (38) убѣждаемся, что должна имѣть мѣсто слѣдующая теорема.

Теорема I. *Пусть для главной точки* ζ *основного пути* ABC *функція* $f(z)$ *сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка ниже 1 относительно* $\frac{1}{z-\zeta}$. *Предположимъ, что для основного пути* ABC *имѣютъ силу оба главныхъ условія, указанныхъ въ § 3 (пп. 4 и 6), и притомъ второе главное условіе распространяется на всѣ точки* z *части* $\zeta\xi$ *этого пути. Пусть* ξ *удовлетворяетъ условію:* $|\psi(\xi)| \leq K$, *и пусть сверхъ того въ разложеніи, опредѣляемомъ равенствами (19) и (20), показатели* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha$ *дѣйствительные, распредѣленные въ восходящемъ порядкѣ. Если для всѣхъ точекъ* z *разсматриваемой части* $\zeta\xi$ *основного пути* ABC *модуль функціи* M, *опредѣляемой равенствами (37) и (35), сохраняетъ значеніе, не превосходящее конечнаго предѣла* μ, *то приближенная величина интеграла* $[\zeta\xi]$, *представляемаго равенствомъ (16), опредѣляется такъ:*

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1}\frac{A_k\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}} + \Delta_s\right\}, \tag{39}$$

гдѣ погрѣшность Δ_s *выражается слѣдующимъ образомъ:*

$$\Delta_s = \rho_s \cdot e^{-m\eta}\left\{\sum_{(-)}\frac{\lambda_k A_k \eta^{\alpha_k}}{m} + \sum_{(+)}\frac{\lambda_k A_k (x_0+h_1)^{\alpha_k}}{m - \frac{\alpha_k}{x_0+h_1}}\right\}, \tag{40}$$

$$\rho_s = \frac{\lambda' \mu \Gamma(1+\alpha_s)}{m^{1+\alpha_s}},\quad \eta = \lg\frac{\psi(\zeta)}{\psi(z)} = x_0 + h_0 i,$$

$$h_1 = |h_0|,\ |\lambda'| < 1,\ |\lambda_k| < 1,$$

при чемъ суммы $\sum_{(-)}$ *и* $\sum_{(+)}$ *распространяются вмѣстѣ на слѣдующія значенія* k: $0, 1, \ldots, s-1$; *въ отдѣльности же* $\sum_{(-)}$ *распространяется лишь на такія значенія* k, *для которыхъ* $\alpha_k < 0$, *а сумма* $\sum_{(+)}$ *относится къ остальнымъ указаннымъ значеніямъ* k.

Очевидно, для успѣшнаго примѣненія теоремы I необходимо не только имѣть основной путь ABC, удовлетворяющій условіямъ, указаннымъ въ § 3, но и получить подъ формой (19) разложеніе функціи $\Pi(y) = f(z) \dfrac{dz}{dy}$, удовлетворяющее другимъ условіямъ, которыя касаются величины B_s, опредѣляемой равенствами (19) и (20) и входящей въ равенство (37). Ниже (въ nn^0 13 и 14) будутъ даны способы полученія разложенія (19), когда такое разложеніе возможно. Способы эти основаны на примѣненіи рядовъ Лагранжа и Маклорена. Теперь же замѣтимъ, что эти ряды можно примѣнять здѣсь особымъ образомъ, не придавая при этомъ существеннаго значенія сходимости этихъ рядовъ, ибо разложеніемъ (19) и его слѣдствіемъ, которое представляется равенствомъ (39), мы въ разсматриваемомъ исчисленіи вообще пользуемся, не какъ безконечнымъ рядомъ (т. е. при $s = \infty$), который при $s = \infty$, какъ будетъ выяснено въ n^0 14, часто оказывается даже расходящимся, подобно формулѣ Стирлинга. Рядами Лагранжа и Маклорена можно пользоваться при полученіи разложенія (19) лишь настолько, чтобы установить форму этого разложенія и убѣдиться въ выполненіи тѣхъ условій, кои выше указаны, т. е. условій (21) и условія, чтобы функція B_s, опредѣляемая равенствами (19) и (20), для всѣхъ точекъ z кривой $\zeta\xi$ (иначе, для всѣхъ точекъ y кривой 0η) сохраняла значеніе, модуль котораго не превосходитъ нѣкотораго конечнаго предѣла. Если эти условія и главныя условія, указанныя въ § 3 (nn^0 4 и 6), выполнены, то теорема I будетъ имѣть полную силу и послужитъ для опредѣленія приближенной величины интеграла $[\zeta\xi]$ и предѣловъ ея погрѣшности, хотя бы при $s = \infty$ формула (39) обращалась въ безконечный расходящійся рядъ.

Эти замѣчанія о разложеніи (19) въ равной мѣрѣ относятся къ послѣдующимъ теоремамъ II, III IV, V и VI, гдѣ мы уже не будемъ ихъ повторять.

Отбрасывая во второй части равенства (39) величину Δ_s, получимъ приближенное выраженіе интеграла $[\zeta\xi]$, зависящее отъ величины ζ, изображаемой главною точкою, и не завися-

щее отъ ξ или η. Равенство (40) можетъ служить для опредѣленія высшаго предѣла модуля величины Δ_s, представляющей погрѣшность разсматриваемаго приближеннаго выраженія.

Опредѣлимъ порядокъ малой величины Δ_s относительно $\frac{1}{m}$. При помощи равенства (25) и условія (15) убѣждаемся, что

$$| e^{-m\eta} | \leqq \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^m.$$

Отсюда и изъ перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4), слѣдуетъ, что количество $e^{-m\eta}$ есть малое порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$. Слѣдовательно, порядокъ второй части равенства (40) совпадаетъ съ порядкомъ перваго ея члена, т. е. не ниже числа $1 + \alpha_s$.

Разсмотримъ теперь нѣкоторыя упрощенія полученныхъ результатовъ.

Формула (40) и ея выводъ упрощаются, если перемѣнное y остается *дѣйствительнымъ* (и, слѣдовательно, положительнымъ) въ то время, когда z описываетъ путь $\zeta\xi$ интеграціи; при чемъ условіе это, какъ будетъ показано въ § 8, *всегда* можетъ быть удовлетворено особымъ выборомъ основного пути ABC. При дѣйствительномъ значеніи перемѣннаго y формулы (23) и (24) получаютъ видъ:

$$[\zeta\xi] = \{\psi(\zeta)\}^m \left\{\sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \int_0^\eta e^{-my} y^{\alpha_k} dy + \rho_s\right\}, \qquad (41)$$

гдѣ

$$\rho_s = \int_0^\eta e^{-my} y^{\alpha_s} B_s dy, \qquad (42)$$

при чемъ количество η положительное и опредѣляется уравне-

ніемъ (25). Задача приведена къ приближенному вычисленію интеграловъ вида:

$$J_k=\int_0^\eta e^{-my} y^{\alpha_k} dy.$$

Имѣемъ:

$$J_k=\int_0^\eta e^{-my} y^{\alpha_k} dy=\frac{\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{\alpha_k+1}}+\delta_k, \qquad (43)$$

$$\delta_k=-\int_\eta^\infty e^{-my} y^{\alpha_k} dy. \qquad (43')$$

Здѣсь

$$\frac{\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}}$$

есть приближенное выраженіе интеграла J_k, а величина δ_k представляетъ погрѣшность этого выраженія. Предѣльныя величины этой погрѣшности можно выразить въ различныхъ формахъ. Между прочимъ, высшій и низшій предѣлы этой погрѣшности можемъ получить изъ слѣдующихъ разсмотрѣній.

Положимъ:

$$L=\int_\eta^\infty e^{-my} y^\alpha dy. \qquad (43'')$$

Очевидно, для значеній y въ предѣлахъ интеграла будемъ имѣть: $y^\alpha\leqq\eta^\alpha$, если $\alpha\leqq 0$, и $y^\alpha\geqq\eta^\alpha$, если $\alpha\geqq 0$. Поэтому

$$L\leqq\frac{\eta^\alpha}{m}e^{-m\eta}, \text{ если } \alpha\leqq 0, \text{ и}$$

$$L\geqq\frac{\eta^\alpha}{m}e^{-m\eta}, \text{ если } \alpha\geqq 0.$$

Далѣе представимъ L въ слѣдующей формѣ:

$$L = \int_{\eta}^{\infty} e^{-\left(m-\frac{\alpha}{\eta}\right)y}\,\Phi(y)\,dy, \tag{43'''}$$

гдѣ

$$\Phi(y) = y^{\alpha} e^{-\frac{\alpha y}{\eta}}. \tag{44}$$

Дифференцируя, находимъ:

$$\Phi'(y) = \Phi(y)\frac{(y-\eta)\alpha}{\eta y}.$$

Отсюда видно, что при возрастаніи y отъ η до ∞ функція $\Phi(y)$ возрастаетъ при $\alpha < 0$ и убываетъ при $\alpha > 0$. Слѣдовательно, при указанномъ измѣненіи y будемъ имѣть:

$$\Phi(y) > \Phi(\eta), \text{ если } \alpha < 0, \text{ и}$$
$$\Phi(y) < \Phi(\eta), \text{ если } \alpha > 0.$$

Отсюда и изъ равенствъ (43''') и (44) слѣдуетъ, что интегралъ L будетъ болѣе или менѣе выраженія:

$$\eta^{\alpha} e^{-\alpha}\int_{\eta}^{\infty} e^{-\left(m-\frac{\alpha}{\eta}\right)y}\,dy,$$

смотря по тому, будетъ ли α менѣе или болѣе нуля. Иначе:

$$L \geqq \frac{\eta^{\alpha+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha}, \text{ если } \alpha \leqq 0, \text{ и}$$

$$L \leqq \frac{\eta^{\alpha+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha}, \text{ если } \alpha \geqq 0.$$

Соединяя полученные результаты вмѣстѣ, приходимъ къ заключенію, что

$$\frac{\eta^{\alpha+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha} \leqq \int_{\eta}^{\infty} e^{-my} y^{\alpha} dy \leqq \frac{\eta^{\alpha} e^{-m\eta}}{m}, \tag{45}$$

если $\alpha \leqq 0$, и

$$\frac{\eta^{\alpha} e^{-m\eta}}{m} \leqq \int_{\eta}^{\infty} e^{-my} y^{\alpha} dy \leqq \frac{\eta^{\alpha+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha}, \tag{45'}$$

если $\alpha \geqq 0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ погрѣшность δ_k, опредѣляемая равенствомъ (43′), должна заключаться въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ неравенствами:

$$-\frac{\eta^{\alpha_k} e^{-m\eta}}{m} \leqq \delta_k \leqq -\frac{\eta^{\alpha_k+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha_k}, \text{ если } \alpha_k \leqq 0; \tag{46}$$

$$-\frac{\eta^{\alpha_k+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha_k} \leqq \delta_k \leqq -\frac{\eta^{\alpha_k} e^{-m\eta}}{m}, \text{ если } \alpha_k \geqq 0. \tag{46'}$$

Замѣтимъ далѣе, что равенство (42) при посредствѣ соотвѣтствующей изъ формулъ (2) и (4) представляется въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ: 1) если функція B_s дѣйствительная, то

$$\rho_s = \bar{B}_s \cdot \int_0^{\eta} e^{-my} y^{\alpha_s} dy = \bar{B}_s \cdot \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha_s)}{m^{\alpha_s+1}} + \delta_s \right\}, \tag{47}$$

гдѣ $\bar{B}_s$ есть среднее значеніе функціи B_s при измѣненіи y отъ 0 до η; 2) если функція B_s мнимая, то

$$\rho_s = \lambda \bar{B}_s \int_0^{\eta} e^{-my} y^{\alpha_s} dy = \lambda \bar{B}_s \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha_s)}{m^{\alpha_s+1}} + \delta_s \right\}, \tag{47'}$$

$$|\lambda| < 1,$$

гдѣ $\overline{B}_s$ есть значеніе функціи B_s, соотвѣтствующее среднему значенію y, заключенному между 0 и η.

При помощи равенствъ (43), (46), (46′), (47) и (47′) формула (41) приводится къ виду (28), при чемъ предѣлы погрѣшности Δ_s должны быть опредѣляемы при помощи равенства (28′) и неравенствъ (46) и (46′). Прибѣгая при этомъ къ высшимъ предѣламъ лишь абсолютныхъ величинъ δ_k, находимымъ помощію равенствъ (46) и (46′), можемъ полученные результаты выразить въ формѣ слѣдующей теоремы.

Теорема II. *Пусть ζ есть главная точка основнаго пути ABC, для котораго выполняется первое главное условіе, указанное въ § 3 (см. n°4), и $\zeta\xi$ есть часть этого пути. Предположимъ, что $|\psi(\xi)| \leqq K_1$, и что для всѣхъ точекъ z части $\zeta\xi$ пути ABC перемѣнное y, опредѣляемое уравненіемъ (17), имѣетъ дѣйствительныя положительныя значенія. Пусть вмѣстѣ съ тѣмъ для всѣхъ указанныхъ значеній z имѣетъ силу разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20), въ которыхъ показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ суть дѣйствительныя величины, удовлетворяющія неравенствамъ:*

$$-1 < \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{s-1} < \alpha_s.$$

При этихъ условіяхъ приближенная величина интеграла $[\zeta\xi]$ опредѣляется по формулѣ (28), при чемъ предѣлы погрѣшности Δ_s находятся при помощи слѣдующей формулы:

$$\Delta_s = \rho_s - e^{-m\eta}\left\{\sum_{(-)}\frac{\theta_k A_k \eta^{\alpha_k}}{m} + \sum_{(+)}\frac{\theta_k A_k \eta^{\alpha_k+1}}{m\eta-\alpha_k}\right\}, \quad (47'')$$

$$\eta = \lg\frac{\psi(\zeta)}{\psi(\xi)}, \quad -1 < \theta_k < +1,$$

гдѣ предѣлы ρ_s опредѣляются соотвѣтствующимъ изъ равенствъ (47) и (47′), при чемъ суммы $\sum_{(-)}$ и $\sum_{(+)}$ распространяются вмѣстѣ на слѣдующія значенія k: 0, 1, 2, ..., $s-1$; въ отдѣльности же сумма $\sum_{(-)}$ распространяется лишь на такія значенія k, для которыхъ $\alpha_k < 0$, а сумма $\sum_{(+)}$ относится ко всѣмъ остальнымъ изъ указанныхъ значеній k.

Представляетъ интересъ частный случай, когда не только показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и перемѣнное η, но также коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots A_s$ и функція B_s суть количества дѣйствительныя. При этомъ условіи можно найти болѣе тѣсные предѣлы погрѣшности Δ_s, получаемые слѣдующимъ образомъ. Умножая соотвѣтствующее изъ неравенствъ (46) и (46′) на дѣйствительное количество A_k и принимая во вниманіе знакъ этого количества, убѣждаемся, что

$$\frac{A_k\,\eta^{\alpha_k+1}\,e^{-m\eta}}{m\eta+\alpha_k} \leqq A_k\,\delta_k \leqq \frac{A_k\,\eta^{\alpha_k}\,e^{-m\eta}}{m}, \text{ если } A_k\,\alpha_k \geqq 0,$$

$$\frac{A_k\,\eta^{\alpha_k}\,e^{-m\eta}}{m} \leqq A_k\,\delta_k \leqq \frac{A_k\,\eta^{\alpha_k+1}\,e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha_k}, \text{ если } A_k\,\alpha_k \leqq 0.$$

При помощи этихъ неравенствъ убѣждаемся, что

$$-M_1\,e^{-m\eta} \leqq \sum_{k=0}^{k=s-1} A_k\,\delta_k \leqq M_2\,e^{-m\eta} \tag{48}$$

гдѣ

$$M_1 = \underset{(-)}{S} \frac{A_k\,\eta^{\alpha_k}}{m} + \underset{(+)}{S} \frac{A_k\,\eta^{\alpha_k+1}}{m\eta+\alpha_k} \tag{48′}$$

$$M_2 = \underset{(-)}{S} \frac{A_k\,\eta^{\alpha_k+1}}{m\eta-\alpha_k} + \underset{(+)}{S} \frac{A_k\,\eta^{\alpha_k}}{m} \tag{48″}$$

при чемъ суммы $\underset{(-)}{S}$ и $\underset{(+)}{S}$ вмѣстѣ распространяются на слѣдующія значенія $k: 0, 1, 2, \ldots, s-1$, а въ отдѣльности сумма $\underset{(-)}{S}$ распространяется лишь на такія значенія k, для которыхъ $A_k\,\alpha_k < 0$, а сумма $\underset{(+)}{S}$ на остальныя изъ указанныхъ значеній k.

Обозначимъ далѣе чрезъ μ_1 и μ_2 наименьшее и наибольшее значенія функціи B_s при возрастаніи y отъ 0 до η. При этомъ изъ равенства (47) заключаемъ, что

$$\mu_1 J_s < \rho_s < \mu_2 J_s \qquad (49)$$

гдѣ J_s есть интегралъ, опредѣляемый равенствомъ (48) при $k = s$. Слѣдовательно, количество J_s при $\alpha_s \geqq 0$ заключается въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ равенствами (43), (43′) и неравенствами (46′) при $k = s$. Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (28) и неравенства (48) и (49) опредѣляютъ высшій и низшій предѣлы погрѣшности Δ. Заключеніе это выразимъ въ формѣ слѣдующей теоремы.

Теорема III. *Пусть ζ есть главная точка основного пути ABC, для котораго выполняется первое главное условіе, указанное въ § 3 (n^o 4), и $\zeta\xi$ есть часть этого пути. Предположимъ, что $|\psi(\xi)| \leqq K_2$ и что для всѣхъ точекъ z части $\zeta\xi$ пути ABC перемѣнное y, опредѣляемое уравненіемъ (17), имѣетъ дѣйствительныя положительныя значенія. Пусть вмѣстѣ съ тѣмъ для всѣхъ указанныхъ значеній z имѣетъ силу разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20), въ которыхъ, показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ суть дѣйствительныя величины, удовлетворяющія неравенствамъ:*

$$-1 < \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{s-1} < \alpha_s \text{ и } \alpha_s \geqq 0.$$

Если въ томъ же разложеніи коеффиціенты $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}$ и функція B_s также дѣйствительныя количества и притомъ функція B_s для всѣхъ точекъ z разсматриваемой части $\zeta\xi$ основного пути ABC не выходитъ изъ конечныхъ предѣловъ μ_1 и $\mu_2 > \mu_1$, то приближенная величина интеграла $[\zeta\xi]$ опредѣляется по формулѣ (28) въ которой Δ_s есть погрѣшность, заключенная въ предѣлахъ, находимыхъ при помощи неравенствъ:

$$\mu_1 J_s - e^{-m\eta} M_1 < \Delta_s < \mu_2 J_s - e^{-m\eta} M_2, \qquad (49')$$

$$\frac{\Gamma(1+\alpha_s)}{m^{1+\alpha_s}} - \frac{\eta^{\alpha_s+1} e^{-m\eta}}{m\eta - \alpha_s} < J_s < \frac{\Gamma(1+\alpha_s)}{m^{1+\alpha_s}} - \frac{\eta^{\alpha_s} e^{-m\eta}}{m}, \qquad (49'')$$

при чемъ количества η, M_1 *и* M_2 *опредѣляются равенствами (25), (48′) и (48″).*

При $\alpha_s < 0$ теорема III также имѣетъ силу, но неравенства (49″) замѣняются другими, вытекающими изъ равенства (43) и неравенствъ (46) при $k=s$.

II. Предположимъ затѣмъ, что нѣкоторые изъ показателей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, входящихъ въ разложеніе, опредѣляемое уравненіями (19) и (20), мнимые.

Представимъ эти показатели α подъ видомъ:

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'',$$

гдѣ α' и α'' суть дѣйствительныя величины. Отсюда и изъ равенства (29′) слѣдуетъ, что выраженіе $(\eta + u)^\alpha$, входящее въ равенство (29), можетъ быть представлено такъ:

$$(\eta + u)^\alpha = \left(\sqrt{(x_0 + u)^2 + h^2_0}\right)^{\alpha'} e^{-\alpha''.\operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0+u} + \Omega i},$$

гдѣ Ω есть дѣйствительное количество. Отсюда и изъ равенствъ (27′) и (29) слѣдуетъ, что

$$-\delta_k | < \int_0^\infty e^{-m(x_0+u) - \alpha''.\operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0+u}} \left(\sqrt{(x_0+u)^2 + h^2_0}\right)^{\alpha'_k} du. \tag{50}$$

Обозначимъ чрезъ γ_k *наименьшее* значеніе выраженія:

$$\alpha''_k.\operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0+u}$$

при возрастаніи u отъ 0 до ∞. Очевидно,

$$\gamma_k = 0, \text{ если } \alpha''_k h_0 \geqq 0, \text{ и}$$

$$\gamma_k = \alpha''_k.\operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0}, \text{ если } \alpha''_k h_0 \leqq 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ неравенства (50) выводимъ слѣдующее неравенство:

$$|\delta_k| < e^{-mx_0 - \gamma_k} L_k, \tag{51}$$

гдѣ

$$L_k=\int_0^\infty e^{-mu}\left(\sqrt{(x_0+u)^2+h^2_0}\right)^{\alpha'_k} du.$$

Для опредѣленія высшаго предѣла интеграла L_k можемъ воспользоваться соотвѣтствующимъ изъ неравенствъ (30′) и (33′), замѣняя въ нихъ α чрезъ α'_k. Изъ разсмотрѣнія этого высшаго предѣла и неравенства (51) выводимъ слѣдующее заключеніе: *если* $\alpha'_k < 0$, *то*

$$\delta_k=\frac{\lambda_k}{m}\eta^{\alpha'_k} e^{-m\eta-\gamma_k}, \quad |\lambda_k| < 1; \tag{52}$$

если же $\alpha'_k \geqq 0$, *то*

$$\delta_k=\frac{\lambda_k (x_0+h_1)^{\alpha'_k} e^{-m\eta-\gamma_k}}{m-\dfrac{\alpha'_k}{x_0+h_1}}, \quad h_1=|h_0|, \quad |\lambda_k| < 1. \tag{53}$$

Для опредѣленія предѣловъ дополнительнаго члена ρ_s мы вправѣ при выполненіи второго главнаго условія воспользоваться равенствами (35), (36) и (37) и величиною μ, представляющею наибольшій модуль количества M при возрастаніи x отъ 0 до x_0. Изъ разсмотрѣнія этихъ выраженій убѣждаемся, что

$$|\rho_s| < \mu\int_0^{x_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} dx.$$

Иначе

$$\rho_s=\lambda\mu\int_0^{x_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} dx=\frac{\lambda'\mu\, \Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}}, \tag{54}$$

$$|\lambda'| < |\lambda| < 1.$$

При помощи равенствъ (28), 28'), (52), (53) и (54) приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, которая представляетъ собою обобщеніе теоремы I.

Теорема IV. *Пусть для главной точки ζ основного пути ABC функція f (z) сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка ниже 1 относительно* $\frac{1}{z-\zeta}$. *Предположимъ, что для основного пути ABC имѣютъ силу оба главныхъ условія, указанныхъ въ § 5 (пп° 4 и 6), и притомъ второе главное условіе распространяется на всѣ точки z части ζξ этого пути. Пусть ξ удовлетворяетъ условію:* $|\psi(\xi)| \leqq K_2$ *и пусть сверхъ того разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20) при условіяхъ (21), имѣетъ силу для всѣхъ точекъ z разсматриваемой части ζξ основного пути ABC, при чемъ модуль функціи M, опредѣляемой равенствами (37) и (35), пусть сохраняетъ значеніе, не превосходящее конечнаго предѣла μ. При этихъ предположеніяхъ приближенная величина интеграла [ζξ] опредѣляется такъ:*

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1}\frac{A_k\,\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}} + \Delta_s\right\} \tag{55}$$

гдѣ погрѣшность Δ_s *представляется такъ:*

$$\Delta_s = \rho_s + e^{-mh_1}\left\{\sum_{(-)}\frac{\lambda_k A_k \mathfrak{M}^{\alpha'_k} e^{-\gamma_k}}{m}\right.$$

$$\left. + \sum_{(+)}\frac{\lambda_k A_k (x_0+h_1)^{\alpha'_k+1} e^{-\gamma_k}}{m(x_0+h_1)-\alpha'_k}\right\}, \tag{56}$$

$$\rho_s = \frac{\lambda\mu\,\Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}},\ |\lambda| < 1,\ |\lambda_k| < 1,\ h_1 = |h_0|,$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0,\ (\text{если } \alpha''_k h_0 \geqq 0); \\ \alpha''_k \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0}\ (\text{если } \alpha''_k h_0 \leqq 0); \end{cases}$$

Далѣе представимъ L въ слѣдующей формѣ:

$$L = \int_{\eta}^{\infty} e^{-\left(m-\frac{\alpha}{\eta}\right)y}\, \Phi(y)\, dy, \tag{43'''}$$

гдѣ

$$\Phi(y) = y^{\alpha} e^{-\frac{\alpha y}{\eta}}. \tag{44}$$

Дифференцируя, находимъ:

$$\Phi'(y) = -\Phi(y)\frac{(y-\eta)\alpha}{\eta y}.$$

Отсюда видно, что при возрастаніи y отъ η до ∞ функція $\Phi(y)$ возрастаетъ при $\alpha < 0$ и убываетъ при $\alpha > 0$. Слѣдовательно, при указанномъ измѣненіи y будемъ имѣть:

$$\Phi(y) > \Phi(\eta), \text{ если } \alpha < 0, \text{ и}$$

$$\Phi(y) < \Phi(\eta), \text{ если } \alpha > 0.$$

Отсюда и изъ равенствъ (43''') и (44) слѣдуетъ, что интегралъ L будетъ болѣе или менѣе выраженія:

$$\eta^{\alpha} e^{-\alpha} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\left(m-\frac{\alpha}{\eta}\right)y}\, dy,$$

смотря по тому, будетъ ли α менѣе или болѣе нуля. Иначе:

$$L \geqq \frac{\eta^{\alpha+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha}, \text{ если } \alpha \leqq 0, \text{ и}$$

$$L \leqq \frac{\eta^{\alpha+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha}, \text{ если } \alpha \geqq 0.$$

Примѣчаніе 1. Само собою разумѣется, что для опредѣленія высшихъ предѣловъ модулей погрѣшностей δ_k и Δ_s можно составить весьма разнообразныя формулы, отличныя отъ вышеприведенныхъ. Укажемъ здѣсь еще слѣдующія формулы. Въ равенствѣ (27') прямая $\eta\infty$, параллельная оси дѣйствительныхъ величинъ, можетъ быть замѣнена прямою, описываемою точкой $y=\eta.u$ при возрастаніи u отъ 1 до $+\infty$. При такомъ преобразованіи пути интегрированія равенство (27') приводится къ виду:

$$\delta_k = -\eta^{\alpha_k+1}\int_1^{+\infty} e^{-m\eta u}\, u^{\alpha_k}\, du. \qquad (56_2)$$

Отсюда видно, что

$$|\,\delta_k\,| < |\,\eta^{\alpha_k+1}\,| \int_1^{\infty} e^{-mx_0 u}\, u^{\alpha'_k}\, du, \qquad (56_3)$$

гдѣ α'_k и x_0 суть дѣйствительныя части количествъ α_k и η. Примѣняя къ интегралу, стоящему во второй части неравенства (56_3), пріемы, подобные тѣмъ, посредствомъ которыхъ получены формулы (45) и (45'), убѣждаемся, что при $\alpha'_k < 0$

$$\delta_k = \frac{\lambda_k \eta^{1+\alpha_k} e^{-m\eta}}{mx_0}, \quad |\,\lambda_k\,| < 1,$$

а при $\alpha'_k \geqq 0$

$$\delta_k = \frac{\lambda_k \eta^{\alpha_k+1} e^{-m\eta}}{mx_0 - \alpha'_k}, \quad |\,\lambda_k\,| < 1.$$

Пользуясь этими выраженіями δ_k, получимъ слѣдующее выраженіе Δ_s:

$$\Delta_s = \rho_s + e^{-m\eta}\left\{\sum_{(-)}\frac{\lambda_k A_k \eta^{1+\alpha_k}}{mx_0} + \sum_{(+)}\frac{\lambda_k A_k \eta^{1+\alpha_k}}{mx_0 - \alpha'_k}\right\}, \qquad (56_4)$$

гдѣ суммы $\Sigma_{(-)}$ и $\Sigma_{(+)}$ имѣютъ такое же значеніе, какъ въ формулѣ (56).

Примѣчаніе 2. Весьма часто въ приложеніяхъ разсматриваемаго исчисленія приходится приближенно опредѣлять интегралъ вида (1), представляющій *дѣйствительную* величину. Если въ такомъ интегралѣ интегрируемая функція имѣетъ также дѣйствительные и коэффиціенты, то основной путь интеграціи можно избрать такъ, чтобы онъ былъ *симметричнымъ* относительно оси дѣйствительныхъ величинъ, при чемъ главныя точки, не лежащія на этой оси, размѣстятся также симметрично относительно нея, представляя попарно мнимыя сопряженныя величины. Звенья такого пути также будутъ попарно симметричны. Въ такомъ случаѣ для устраненія мнимыхъ величинъ, а также для повышенія чувствительности результатовъ, надлежитъ вычислять *вмѣстѣ* интегралы, отнесенные къ симметричнымъ звеньямъ $\zeta\xi$ и $\zeta'\xi'$. Сумма интеграловъ $[\zeta\xi]+[\zeta'\xi']$ при такомъ порядкѣ вычисленія будетъ дѣйствительнымъ количествомъ, при чемъ можно отыскивать *низшій* и *высшій* предѣлы погрѣшности приближеннаго выраженія этой суммы. Укажемъ здѣсь кратко общій планъ такого вычисленія. Обозначая вообще чрезъ z и z' комплексныя *сопряженныя* количества и прибѣгая къ равенствамъ (28), (28′), (56_2), (35), (36) и (37), находимъ:

$$[\zeta\xi]+[\zeta'\xi']=$$

$$K_1{}^m\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1}\left(\frac{\psi^m(\zeta)}{K_1{}^m}A_k\frac{\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}}+\frac{\psi^m(\zeta')}{K_1{}^m}A'_k\frac{\Gamma(1+\alpha'_k)}{m^{1+\alpha'_k}}\right)+\nabla_s\right\},\tag{56_5}$$

гдѣ ∇_s есть погрѣшность, представляемая такъ:

$$\nabla_s=\nabla'_s+\nabla_s'',\tag{56_6}$$

$$\nabla'_s=\int_0^{x_0}e^{-mx}x^{\alpha'_s}V(x)\,dx,\quad \nabla_s''=\int_1^{+\infty}e^{-mx_0u}W(u)\,du,\tag{56_7}$$

Представляетъ интересъ частный случай, когда не только показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и перемѣнное η, но также коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots A_{s-1}$ и функція B_s суть количества дѣйствительныя. При этомъ условіи можно найти болѣе тѣсные предѣлы погрѣшности Δ_s, получаемые слѣдующимъ образомъ. Умножая соотвѣтствующее изъ неравенствъ (46) и (46') на дѣйствительное количество A_k и принимая во вниманіе знакъ этого количества, убѣждаемся, что

$$\frac{A_k \eta^{\alpha_k+1} e^{-m\eta}}{m\eta+\alpha_k} \leqq A_k \delta_k \leqq \frac{A_k \eta^{\alpha_k} e^{-m\eta}}{m}, \text{ если } A_k \alpha_k \geqq 0,$$

$$\frac{A_k \eta^{\alpha_k} e^{-m\eta}}{m} \leqq A_k \delta_k \leqq \frac{A_k \eta^{\alpha_k+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha_k}, \text{ если } A_k \alpha_k \leqq 0.$$

При помощи этихъ неравенствъ убѣждаемся, что

$$-M_1 e^{-m\eta} \leqq \sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \delta_k \leqq -M_2 e^{-m\eta} \qquad (48)$$

гдѣ

$$M_1 = \underset{(-)}{S} \frac{A_k \eta^{\alpha_k}}{m} + \underset{(+)}{S} \frac{A_k \eta^{\alpha_k+1}}{m\eta+\alpha_k} \qquad (48')$$

$$M_2 = \underset{(-)}{S} \frac{A_k \eta^{\alpha_k+1}}{m\eta-\alpha_k} + \underset{(+)}{S} \frac{A_k \eta^{\alpha_k}}{m} \qquad (48'')$$

при чемъ суммы $\underset{(-)}{S}$ и $\underset{(+)}{S}$ вмѣстѣ распространяются на слѣдующія значенія $k: 0, 1, 2, \ldots, s-1$, а въ отдѣльности сумма $\underset{(-)}{S}$ распространяется лишь на такія значенія k, для которыхъ $A_k \alpha_k < 0$, а сумма $\underset{(+)}{S}$ на остальныя изъ указанныхъ значеній k.

Обозначимъ далѣе чрезъ μ_1 и μ_2 наименьшее и наибольшее значенія функціи B_s при возрастаніи y отъ 0 до η. При этомъ изъ равенства (47) заключаемъ, что

$$\mu_1 J_s < \rho_s < \mu_2 J_s \qquad (49)$$

гдѣ J_s есть интегралъ, опредѣляемый равенствомъ (48) при $k=s$. Слѣдовательно, количество J_s при $\alpha_s \geqq 0$ заключается въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ равенствами (43), (43′) и неравенствами (46′) при $k=s$. Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (28) и неравенства (48) и (49) опредѣляютъ высшій и низшій предѣлы погрѣшности Δ_s. Заключеніе это выразимъ въ формѣ слѣдующей теоремы.

Теорема III. *Пусть ζ есть главная точка основного пути ABC, для котораго выполняется первое главное условіе, указанное въ § 3 (n° 4), и $\zeta\xi$ есть часть этого пути. Предположимъ, что $|\psi(\xi)| \leqq K_2$ и что для всѣхъ точекъ z части $\zeta\xi$ пути ABC перемѣнное y, опредѣляемое уравненіемъ (17), имѣетъ дѣйствительныя положительныя значенія. Пусть вмѣстѣ съ тѣмъ для всѣхъ указанныхъ значеній z имѣетъ силу разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20), въ которыхъ, показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ суть дѣйствительныя величины, удовлетворяющія неравенствамъ:*

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{s-1} < \alpha_s \text{ и } \alpha_s \geqq 0.$$

Если въ томъ же разложеніи коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}$ и функція B_s также дѣйствительныя количества и притомъ функція B_s для всѣхъ точекъ z разсматриваемой части $\zeta\xi$ основного пути ABC не выходитъ изъ конечныхъ предѣловъ μ_1 и $\mu_2 > \mu_1$, то приближенная величина интеграла $[\zeta\xi]$ опредѣляется по формулѣ (28) въ которой Δ_s есть погрѣшность, заключенная въ предѣлахъ, находимыхъ при помощи неравенствъ:

$$\mu_1 J_s - e^{-m\eta} M_1 < \Delta_s < \mu_2 J_s - e^{-m\eta} M_2, \qquad (49')$$

$$\frac{\Gamma(1+\alpha_s)}{m^{1+\alpha_s}} - \frac{\eta^{\alpha_s+1} e^{-m\eta}}{m\eta-\alpha_s} < J_s < \frac{\Gamma(1+\alpha_s)}{m^{1+\alpha_s}} - \frac{\eta^{\alpha_s} e^{-m\eta}}{m}, \qquad (49'')$$

при чемъ количества η, M_1 *и* M_2 *опредѣляются равенствами (25), (48′) и (48″).*

При $\alpha_s < 0$ теорема III также имѣетъ силу, но неравенства (49″) замѣняются другими, вытекающими изъ равенства (43) и неравенствъ (46) при $k=s$.

II. Предположимъ затѣмъ, что нѣкоторые изъ показателей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, входящихъ въ разложеніе, опредѣляемое уравненіями (19) и (20), мнимые.

Представимъ эти показатели α подъ видомъ:

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'',$$

гдѣ α' и α'' суть дѣйствительныя величины. Отсюда и изъ равенства (29′) слѣдуетъ, что выраженіе $(\eta + u)^\alpha$, входящее въ равенство (29), можетъ быть представлено такъ:

$$(\eta + u)^\alpha = \left(\sqrt{(x_0 + u)^2 + h_0^2}\right)^{\alpha'} e^{-\alpha''.\operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0+u} + \Omega i},$$

гдѣ Ω есть дѣйствительное количество. Отсюда и изъ равенствъ (27′) и (29) слѣдуетъ, что

$$-\delta_k| < \int_0^\infty e^{-m(x_0+u) - \alpha''.\operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0+u}} \left(\sqrt{(x_0+u)^2 + h_0^2}\right)^{\alpha'_k} du. \tag{50}$$

Обозначимъ чрезъ γ_k *наименьшее* значеніе выраженія:

$$\alpha''_k . \operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0+u}$$

при возрастаніи u отъ 0 до ∞. Очевидно,

$$\gamma_k = 0, \text{ если } \alpha''_k h_0 \geqq 0, \text{ и}$$

$$\gamma_k = \alpha''_k . \operatorname{arc\,tg}\frac{h_0}{x_0}, \text{ если } \alpha''_k h_0 \leqq 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ неравенства (50) выводимъ слѣдующее неравенство:

$$|\delta_k| < e^{-mx_0 - \gamma_k} L_k, \tag{51}$$

гдѣ

$$L_k=\int_0^\infty e^{-mu}\left(\sqrt{(x_0+u)^2+h_0^2}\right)^{\alpha'_k} du.$$

Для опредѣленія высшаго предѣла интеграла L_k можемъ воспользоваться соотвѣтствующимъ изъ неравенствъ (30′) и (33′), замѣняя въ нихъ α чрезъ α'_k. Изъ разсмотрѣнія этого высшаго предѣла и неравенства (51) выводимъ слѣдующее заключеніе: *если* $\alpha'_k < 0$, *то*

$$\delta_k=\frac{\lambda_k}{m}\eta^{\alpha'_k} e^{-m\eta-\gamma_k}, \quad |\lambda_k| < 1; \tag{52}$$

если же $\alpha'_k \geqq 0$, *то*

$$\delta_k=\frac{\lambda_k (x_0+h_1)^{\alpha'_k} e^{-m\eta-\gamma_k}}{m-\dfrac{\alpha'_k}{x_0+h_1}}, \quad h_1=|h_0|, \quad |\lambda_k| < 1. \tag{53}$$

Для опредѣленія предѣловъ дополнительнаго члена ρ_s мы вправѣ при выполненіи второго главнаго условія воспользоваться равенствами (35), (36) и (37) и величиною μ, представляющею наибольшій модуль количества M при возрастаніи x отъ 0 до x_0. Изъ разсмотрѣнія этихъ выраженій убѣждаемся, что

$$|\rho_s| < \mu\int_0^{x_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} dx.$$

Иначе

$$\rho_s=\lambda\mu\int_0^{x_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} dx=\frac{\lambda'\mu\, \Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}}, \tag{54}$$

$$|\lambda'| < |\lambda| < 1.$$

При помощи равенствъ (28), 28′), (52), (53) и (54) приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, которая представляетъ собою обобщеніе теоремы I.

Теорема IV. *Пусть для главной точки* ζ *основного пути* ABC *функція* $f(z)$ *сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка ниже 1 относительно* $\frac{1}{z-\zeta}$. *Предположимъ, что для основного пути* ABC *имѣютъ силу оба главныхъ условія, указанныхъ въ § 5 (пп°. 4 и 6), и притомъ второе главное условіе распространяется на всѣ точки* z *части* $\zeta\xi$ *этого пути. Пусть* ξ *удовлетворяетъ условію:* $|\psi(\xi)| \leqq K_2$ *и пусть сверхъ того разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20) при условіяхъ (21), имѣетъ силу для всѣхъ точекъ* z *разсматриваемой части* $\zeta\xi$ *основного пути* ABC, *при чемъ модуль функціи* M, *опредѣляемой равенствами (37) и (35), пусть сохраняетъ значеніе, не превосходящее конечнаго предѣла* μ. *При этихъ предположеніяхъ приближенная величина интеграла* $[\zeta\xi]$ *опредѣляется такъ:*

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1} \frac{A_k\,\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}} + \Delta_s\right\} \tag{55}$$

гдѣ погрѣшность Δ_s *представляется такъ:*

$$\Delta_s = \rho_s + e^{-mh_1}\left\{\sum_{(-)} \frac{\lambda_k A_k\, x_0^{\alpha'_k} e^{-\gamma_k}}{m}\right.$$

$$\left. + \sum_{(+)} \frac{\lambda_k A_k (x_0 + h_1)^{\alpha'_k+1} e^{-\gamma_k}}{m}\right\}, \tag{56}$$

$$\rho_s = \frac{\lambda\,\mu\,\Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}},\ |\lambda| < 1,\ |\lambda_k| \leq 1,\ h_1 = |h_0|,$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0\ (\text{если } \alpha''_k h_0 \geqq 0), \\ \alpha''_k \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{h_0}{x_0}\ (\text{если } \alpha''_k h_0 \leqq 0); \end{cases}$$

при чемъ количества r_i, x_i *и* h_0 *опредѣляются равенствами* (25) *и* (29), *суммы* $\Sigma_{(-)}$ *и* $\Sigma_{(+)}$ *вмѣстѣ распространяются на слѣдующія значенія* k: 0, 1, ... $s+1$, *въ отдѣльности же сумма* $\Sigma_{(-)}$ *распространяется лишь на такія значенія* k, *для которыхъ* $\alpha_k \leqq 0$, *а сумма* $\Sigma_{(+)}$ *относится къ остальнымъ изъ указанныхъ значеній* k.

Если основной путь интеграціи выберемъ такъ, чтобы величина η была дѣйствительной, то $h_0 = 0$ и всѣ величины γ_k обращаются въ нули, что упрощаетъ формулу (56).

Такъ какъ упрощеніе это всегда осуществимо указанными въ § 8 деформаціями, то оно не ограничиваетъ задачи по существу и приводитъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема V. *Пусть для главной точки* ζ *основного пути* ABC *функція* $f(z)$ *сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка ниже* 1 *относительно* $\frac{1}{z-\zeta}$. *Предположимъ, что для основного пути* ABC *имѣетъ силу первое главное условіе, указанное въ* § 3 (n° 4), *и притомъ для всѣхъ точекъ* z *части* $\zeta\xi$ *этого пути перемѣнное* y *представляетъ дѣйствительную положительную величину. Пусть* $|\psi(\xi)| \leqq K_2$ *и пусть сверхъ того разложеніе, опредѣляемое равенствами* (19) *и* (20), *имѣетъ силу для всѣхъ точекъ* z *разсматриваемой части* $\zeta\xi$ *основного пути* ABC, *при чемъ модуль функціи* B_s *опредѣляемой равенствами* (19) *и* (20), *пусть сохраняетъ значеніе, не превосходящее конечнаго предѣла* μ. *При этихъ предположеніяхъ приближенная величина интеграла* $[\zeta\xi]$ *опредѣляется по формулѣ* (28), *въ которой* Δ_s *есть погрѣшность, представляемая такъ:*

$$\Delta_s = \rho_s + e^{-m\eta}\left\{\sum_{(-)}\frac{\lambda_k A_k \eta^{\alpha'_k}}{m} + \sum_{(+)}\frac{\lambda_k A_k \eta^{\alpha'_k+1}}{m\eta - \alpha'_k}\right\}; \quad (56_1)$$

$$\eta = \lg\frac{\psi(\zeta)}{\psi(\xi)}, \quad \rho_s = \frac{\lambda\mu\, \Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}}, \quad |\lambda| < 1, \; |\lambda_k| < 1,$$

при чемъ суммы $\Sigma_{(-)}$ и $\Sigma_{(+)}$ *имѣютъ то же значеніе, какъ въ теоремѣ IV.*

Примѣчаніе 1. Само собою разумѣется, что для опредѣленія высшихъ предѣловъ модулей погрѣшностей δ_k и Δ_s можно составить весьма разнообразныя формулы, отличныя отъ вышеприведенныхъ. Укажемъ здѣсь еще слѣдующія формулы. Въ равенствѣ (27′) прямая $\eta\infty$, параллельная оси дѣйствительныхъ величинъ, можетъ быть замѣнена прямою, описываемою точкой $y=\eta . u$ при возрастаніи u отъ 1 до $+\infty$. При такомъ преобразованіи пути интегрированія равенство (27′) приводится къ виду:

$$\delta_k = -\eta^{\alpha_k+1}\int_1^{+\infty} e^{-m\eta u}\, u^{\alpha_k}\, du. \qquad (56_2)$$

Отсюда видно, что

$$|\,\delta_k\,| < |\,\eta^{\alpha_k+1}\,| \int_1^{\infty} e^{-mx_0 u}\, u^{\alpha'_k}\, du, \qquad (56_3)$$

гдѣ α'_k и x_0 суть дѣйствительныя части количествъ α_k и η. Примѣняя къ интегралу, стоящему во второй части неравенства (56_3), пріемы, подобные тѣмъ, посредствомъ которыхъ получены формулы (45) и (45′), убѣждаемся, что при $\alpha'_k < 0$

$$\delta_k = \frac{\lambda_k \eta^{1+\alpha_k} e^{-m\eta}}{mx_0}, \quad |\,\lambda_k\,| < 1,$$

а при $\alpha'_k \geqq 0$

$$\delta_k = \frac{\lambda_k \eta^{\alpha_k+1} e^{-m\eta}}{mx_0 - \alpha'_k}, \quad |\,\lambda_k\,| < 1.$$

Пользуясь этими выраженіями δ_k, получимъ слѣдующее выраженіе Δ_s:

$$\Delta_s = \rho_s + e^{-m\eta}\left\{ \sum_{(-)} \frac{\lambda_k A_k \eta^{1+\alpha_k}}{mx_0} + \sum_{(+)} \frac{\lambda_k A_k \eta^{1+\alpha_k}}{mx_0 - \alpha'_k} \right\}, \qquad (56_4)$$

гдѣ суммы $\Sigma_{(-)}$ и $\Sigma_{(+)}$ имѣютъ такое же значеніе, какъ въ формулѣ (56).

Примѣчаніе 2. Весьма часто въ приложеніяхъ разсматриваемаго исчисленія приходится приближенно опредѣлять интегралъ вида (1), представляющій *дѣйствительную* величину. Если въ такомъ интегралѣ интегрируемая функція имѣетъ также дѣйствительные и коэффиціенты, то основной путь интеграціи можно избрать такъ, чтобы онъ былъ *симметричнымъ* относительно оси дѣйствительныхъ величинъ, при чемъ главныя точки, не лежащія на этой оси, размѣстятся также симметрично относительно нея, представляя попарно мнимыя сопраженныя величины. Звенья такого пути также будутъ попарно симметричны. Въ такомъ случаѣ для устраненія мнимыхъ величинъ, а также для повышенія чувствительности результатовъ, надлежитъ вычислять *вмѣстѣ* интегралы, отнесенные къ симметричнымъ звеньямъ $\zeta\xi$ и $\zeta'\xi'$. Сумма интеграловъ $[\zeta\xi]+[\zeta'\xi']$ при такомъ порядкѣ вычисленія будетъ дѣйствительнымъ количествомъ, при чемъ можно отыскивать *низшій* и *высшій* предѣлы погрѣшности приближеннаго выраженія этой суммы. Укажемъ здѣсь кратко общій планъ такого вычисленія. Обозначая вообще чрезъ z и z' комплексныя *сопряженныя* количества и прибѣгая къ равенствамъ (28), (28′), (56₂), (35), (36) и (37), находимъ:

$$[\zeta\xi]+[\zeta'\xi'] =$$

$$K_1{}^m \left\{ \sum_{k=0}^{k=s-1} \left(\frac{\psi^m(\zeta)}{K_1^m} A_k \frac{\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}} + \frac{\psi^m(\zeta')}{K_1^m} A'_k \frac{\Gamma(1+\alpha'_k)}{m^{1+\alpha'_k}} \right) + \nabla_s \right\}, \tag{56$_5$}$$

гдѣ ∇_s есть погрѣшность, представляемая такъ:

$$\nabla_s = \nabla'_s + \nabla_s'', \tag{56$_6$}$$

$$\nabla'_s = \int_0^{x_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} V(x)\, dx, \quad \nabla_s'' = \int_1^{+\infty} e^{-mx_0 u} W(u)\, du, \tag{56$_7$}$$

$$V(x) = \frac{\psi^m(\zeta)}{K_1^{\,m}} e^{-mh^i} x^{\alpha_s'' i} M + \frac{\psi^m(\zeta')}{K_1^{\,m}} e^{mhi} x^{-\alpha_s'' i} M', \quad (56_8)$$

$$W(u) = -\sum_{k=0}^{k=s-1} \left\{ \frac{\psi^m(\zeta)}{K_1^{\,m}} A_k \eta^{\alpha_k+1} e^{-mh_0 ui} u^{\alpha_k} + \frac{\psi^m(\zeta')}{K_1^{\,m}} A'_k \eta'^{\alpha'_k+1} e^{+mh_0 ui} u^{\alpha'_k} \right\}. \quad (56_9)$$

Такъ какъ функціи $V(x)$ и $W(u)$ *дѣйствительныя*, то извѣстными пріемами можемъ найти высшій и нисшій предѣлы интеграловъ ∇'_s и ∇_s'', опредѣляемыхъ равенствами (56_7). Послѣ этого легко будетъ получить высшій и низшій предѣлы погрѣшности ∇_s, опредѣляемой равенствомъ (56_6).

Примѣчаніе 3. Вообще, если желаемъ получить болѣе чувствительныя формулы для оцѣнки погрѣшности Δ_s, опредѣляемой равенствами (28′), (36) и (27′) или (56_2), можемъ поступать по слѣдующему плану. При посредствѣ указанныхъ равенствъ можемъ представить эту погрѣшность, какъ сумму двухъ интеграловъ, изъ коихъ одинъ относится къ дѣйствительному перемѣнному x, а другой къ дѣйствительному перемѣнному u. Затѣмъ къ названнымъ интеграламъ могутъ быть примѣнены пріемы, основанные на соотвѣтствующей изъ формулъ (2) и (4), которыя и приведутъ къ опредѣленію искомыхъ предѣловъ этихъ интеграловъ и погрѣшности Δ_s.

n° 10. Второе главное условіе, указанное въ § 3 (см. *n*° 6), не всегда можетъ быть распространено на всѣ точки каждаго звена основного пути *ABC*. Въ такомъ случаѣ, какъ мы уже упоминали въ *n*° 8, для устраненія возникающихъ затрудненій существуютъ два пріема: 1) пріемъ, основанный на подходящемъ выборѣ основного пути *ABC* (который долженъ быть *хорошо направленъ* въ смыслѣ, указанномъ въ *n*° 4) и на отдѣленіи его второстепенныхъ частей, и 2) пріемъ, не требующій отдѣленія второстепенныхъ частей и основанный на преобразованіи формулы, служащей для опредѣленія предѣловъ члена ρ_s, входящаго въ составъ погрѣшности Δ_s. Разсмотримъ эти два пріема отдѣльно.

I. Возможна такая деформація основного пути ABC, которая вліяетъ на выполненіе втораго главнаго условія (n^0 6) по крайней мѣрѣ для *главныхъ* частей этого пути, дѣлая его хорошо направленнымъ (см. n^0 4). Полнѣе такая деформація будетъ описана въ § 8. Теперь мы сдѣлаемъ (пока безъ доказательства) допущеніе, что этою деформаціей мы достигли того, что основной путь ABC *хорошо направленъ*, и, слѣдовательно, существуетъ часть $\zeta\xi$ *полнаго* звена $\zeta\xi'$ перваго рода, не меньшая главной части и *достаточная* для примѣненія къ ней предшествующихъ теоремъ и формулъ. Затѣмъ, опираясь на это допущеніе и на свойства количествъ K_1 и K_2, докажемъ, что другая же часть $\xi\xi'$ полнаго звена $\zeta\xi'$, которую мы назовемъ *второстепенною*, будетъ играть второстепенную роль, *вліяя только на погрѣшность.*

Изъ сдѣланнаго допущенія вытекаетъ, что $\zeta\xi$ есть такая часть основного пути ABC, которая обладаетъ всѣми свойствами звена перваго рода и, сверхъ того, на всемъ протяженіи своемъ удовлетворяетъ второму главному условію (n^0 6). Слѣдовательно точка ξ на протяженіи звена $\zeta\xi'$ избрана такъ, что для нея, выполняется условіе:

$$|\psi(\xi)| \leqq K_2. \tag{57}$$

Пусть точка z движется по кривой $\zeta\xi'$, начиная отъ главной точки ζ. Модуль R функціи $\psi(z)$, измѣняясь непрерывно отъ K_1 до модуля $\psi(\xi')$, удовлетворяющаго условію: $|\psi(\xi')| \leqq K_2$, непремѣнно долженъ проходить черезъ значеніе K_2. Пусть ξ'' есть то положеніе движущейся точки z, при которомъ модуль R получаетъ значеніе K_2, такъ что

$$|\psi(\xi'')| = K_2. \tag{58}$$

Если условію: $|\psi(z)| = K_2$ удовлетворяетъ нѣсколько точекъ z кривой $\zeta\xi'$, то подъ ξ'' будемъ разумѣть ту изъ нихъ, которая встрѣчается *первою* при указанномъ движеніи z по пути $\zeta\xi'$. Очевидно, $\zeta\xi''$ есть одна изъ *главныхъ* частей основного пути ABC (см. n^0 4). Части $\zeta\xi''$ и $\xi''\xi'$ звена $\zeta\xi'$ будутъ обладать слѣдующими свойствами: 1) при измѣненіи z по

кривой $\zeta\xi''$ модуль R функціи $\psi(z)$ *постоянно убываетъ* отъ K_1 до K_2; 2) для всѣхъ точекъ z кривой $\xi''\xi'$ имѣетъ мѣсто неравенство:

$$|\,\psi(z)\,| \leqq K_2\,. \tag{59}$$

Эти свойства кривыхъ $\zeta\xi''$ и $\xi''\xi'$ вытекаютъ изъ понятій о maximum'ахъ и minimum'ахъ модуля R функціи $\psi(z)$ и ихъ послѣдовательномъ чередованіи при прохожденіи подвижною точкою z пути $\zeta\xi'$. Очевидно, K_1 есть maximum maximorum модуля R для кривой $\zeta\xi''$, а K_2 есть maximum maximorum модуля R для кривой $\xi''\xi'$.

Очевидно далѣе, что точка ξ должна лежать на кривой $\xi''\xi'$ и что *неравенство* (59) *должно имѣть мѣсто для всѣхъ точекъ z второстепенной части $\xi\xi'$ звена $\zeta\xi'$*, такъ какъ $\xi\xi'$ есть часть кривой $\xi''\xi'$, для которой K_2 есть maximum maximorum модуля R функціи $\psi(z)$.

Это свойство второстепенной части $\xi\xi'$ имѣетъ важное значеніе: оно даетъ возможность доказать, что отнятіе интеграла $[\xi\xi']$ отъ интеграла $[\zeta\xi']$ вліяетъ лишь на погрѣшность приближеннаго выраженія интеграла и приводитъ приближенное вычисленіе интеграла $[\zeta\xi']$ къ таковому же вычисленію интеграла $[\zeta\xi]$. Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$[\zeta\xi'] = [\zeta\xi] + [\xi\xi']\,. \tag{60}$$

При этомъ интегралъ $[\xi\xi']$, представляемый такъ:

$$[\xi\xi'] = \int\limits_{(\xi\xi')} f(z)\,\psi^m(z)\,dz,$$

приводится къ виду:

$$[\xi\xi'] = \psi^m(\zeta)\,.\,\delta\,, \tag{60'}$$

гдѣ

$$\delta = \int\limits_{(\xi\xi')} f(z)\left\{\frac{\psi(z)}{\psi(\zeta)}\right\}^m dz\,. \tag{60''}$$

Далѣе воспользуемся извѣстнымъ неравенствомъ:

$$\left|\int\limits_{(L)} \Phi(z)\,dz\right| \leqq l\,\mu, \qquad (60''')$$

гдѣ l есть длина пути L интегрированія и μ есть количество, не меньшее наибольшаго значенія модуля функціи $\Phi(z)$ для точекъ z кривой L.

Имѣя въ виду неравенство (59), сохраняющее силу для точекъ z кривой $\xi\xi'$, убѣждаемся, что для этой кривой

$$\left|\frac{\psi(z)}{\psi(\zeta)}\right| < e^{-g},$$

гдѣ

$$e^{-g} = \frac{K_2}{K_1}. \qquad (61)$$

Если при этомъ обозначимъ чрезъ l_1 длину кривой $\xi\xi'$ и чрезъ μ_1 наибольшій модуль функціи $f(z)$ для той же кривой, то неравенство (60'''), примѣненное къ интегралу, стоящему во второй части равенства (60''), приведетъ къ слѣдующему неравенству:

$$|\delta| < l_1 \mu_1 e^{-mg}.$$

Иначе

$$\delta = \lambda\, l_1 \mu_1 e^{-mg}, \quad |\lambda| < 1. \qquad (61_1)$$

Отсюда и изъ равенства

$$e^{-mg} = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^m,$$

а также изъ перваго главнаго условія (см. n^0 4) слѣдуетъ, что δ есть малое количество порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$ и *должно быть отнесено къ погрѣшности.*

Другое примѣчательное выраженіе интеграла $[\xi\xi']$, отнесеннаго къ второстепенной части $\xi\xi'$ звена $\zeta\xi'$, получается изъ

слѣдующихъ соображеній. Пусть y и z связаны уравненіемъ (17) и пусть $\eta\eta'$ есть кривая, описываемая точкой y въ то время, когда точка z проходитъ кривую $\xi\xi'$. Очевидно, равенство (60″) приводится къ виду:

$$\delta = \int\limits_{(\eta\eta')} e^{-my}\, \Pi\, y)\, dy, \qquad (61_2)$$

гдѣ

$$\Pi\,(y) = f\,(z)\,\frac{dz}{dy} = -\frac{f\,(z)\,\psi\,(z)}{\psi'\,(z)}\,. \qquad (61_3)$$

Примѣняя неравенство вида (60‴) къ интегралу, стоящему во второй части равенства (61_2), убѣждаемся, что

$$\delta = \lambda\, \mu'_1\, l'_1\, e^{-mg}, \quad |\,\lambda\,| < 1, \qquad (61_4)$$

гдѣ l'_1 есть длина кривой $\eta\eta'$, μ'_1 есть наибольшее значеніе модуля вышеуказанной функціи $\Pi\,(y)$ для точекъ y кривой $\eta\eta'$ и g есть количество опредѣляемое равенствомъ (61).

Формулы (61_1) и (61_4) дѣлаются негодными, если функція $f\,(z)$ для точекъ z кривой $\xi\xi'$ обращается въ безконечность, а формула (61_4) дѣлается негодною и въ томъ случаѣ, когда на кривой $\xi\xi'$ лежатъ изображенія корней уравненія: $\psi'\,(z) = 0$. Но *дополнительною* консервативною деформаціей второстепенныхъ частей основного пути можно обойти упомянутыя неудобныя точки, при чемъ иногда ради этого приходится повысить величину K_2 подъ условіемъ однако, чтобы не нарушилось первое главное условіе, указанное въ § 3 (n^0 4).

Равенства (60) и (60′) и соотвѣтствующая изъ формулъ (39) и (55), опредѣляющихъ приблизительную величину интеграла [ζξ], приводятъ къ слѣдующей формулѣ:

$$[\zeta\xi'] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1}\frac{A_k\Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}} + \Delta'_s\right\}, \qquad (62)$$

гдѣ погрѣшность Δ'_s выражается такъ:

$$\Delta_s' = \Delta_s + \delta, \tag{62'}$$

при чемъ высшій предѣлъ модуля величины δ опредѣляется при помощи равенства (61_1) или (61_4), а высшій предѣлъ модуля Δ_s опредѣляется по соотвѣтствующей изъ формулъ (40), (47″), (49′) и (56) или (56_4).

Порядокъ малой величины Δ'_s относительно $\frac{1}{m}$ не ниже дѣйствительной части числа $1+\alpha_s$.

Главная цѣль отдѣленія второстепенныхъ частей звеньевъ та, чтобы не только отбросить части основного пути ABC, не вліяющія на приближенную величину интеграла $[ABC]$ и оказывающія вліяніе лишь на ея погрѣшность, но сверхъ того изъ остальныхъ частей пути ABC построить *укороченныя* звенья перваго рода, удовлетворяющія на всемъ протяженіи своемъ какъ второму главному условію (n^0 6), такъ и *всѣмъ остальнымъ условіямъ* общей теоремы IV. Эта цѣль достигается вообще предварительной деформаціей основного пути ABC. Въ § 8 окончательно будетъ выяснено, что путь ABC всегда можетъ быть построенъ такъ, чтобы возможно было въ указанномъ смыслѣ отдѣленіе его второстепенныхъ частей.

Послѣ того, какъ достигнуто отдѣленіе второстепенныхъ частей для всѣхъ звеньевъ основного пути ABC, вычисленіе интеграла $[S]$ вида (7), отнесеннаго ко всей совокупности S второстепенныхъ частей, можно вести отдѣльно отъ вычисленія интеграловъ для остальныхъ частей основного пути ABC. Для вычисленія этихъ послѣднихъ интеграловъ служатъ теоремы и формулы, указанныя въ n^0 9, а къ интегралу $[S]$, отнесенному ко всѣмъ второстепеннымъ частямъ S, можемъ примѣнить слѣдующій пріемъ. Имѣемъ:

$$[S] = K_1^m \int_{(S)} \frac{\psi^m(z)}{K_1^m} f(z)\, dz.$$

Отсюда и изъ того соображенія, что для точекъ z второстепенныхъ частей основного пути ABC имѣетъ силу неравенство:

$$\left|\frac{\psi^m(z)}{K_1^m}\right| \leqq \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^m,$$

получаемъ [при посредствѣ неравенства (60‴)] слѣдующую формулу:

$$[S] = \lambda l . \mu_2 K_1^m e^{-mg}, \quad |\lambda| < 1, \tag{63}$$

гдѣ g есть величина, опредѣляемая равенствомъ (61), l есть длина всѣхъ второстепенныхъ частей основнаго пути ABC и μ_2 есть наибольшее значеніе модуля функціи $f(z)$ для точекъ z второстепенныхъ частей пути ABC. Очевидно, *интегралъ* $[S]$ *повліяетъ лишь на погрѣшность приближенной величины интеграла* $[ABC]$.

Кромѣ формулы (63), можемъ получить выраженіе интеграла $[S]$ сложеніемъ модулей выраженій вида (61_k), соотвѣтствующихъ каждому звену втораго рода, и умноженіемъ полученной суммы на выраженіе $\lambda . K_1^m$, въ которомъ $|\lambda| < 1$.

II. Разнообразныя условія, при которыхъ приходится примѣнять разсматриваемое исчисленіе приближенныхъ выраженій интеграловъ вида (1), иногда требуютъ избѣгнуть вышеизложеннаго пріема, основаннаго на отдѣленіи отъ звеньевъ основного пути ABC второстепенныхъ частей. Въ виду этого мы видоизмѣнимъ этотъ пріемъ, прибѣгая къ слѣдующимъ соображеніямъ и формуламъ.

Пусть подъ $\zeta\xi$ разумѣется то или другое *полное* звено перваго рода, принадлежащее основному пути ABC. Предположимъ, что второе главное условіе, указанное въ § 3 (n° 6), выполняется не для всѣхъ точекъ z звена $\zeta\xi$, а лишь вначалѣ его, т. е. для части $\zeta z'$ хотя и конечной, но не обнимающей непремѣнно даже главной части $\zeta\xi''$. Слѣдовательно, мы допускаемъ, что даже на главной части $\zeta\xi''$ возможны точки z, для кото-

рыхъ производная $\frac{dh}{dx}$ обращается въ безконечность, дѣлая эту часть нехорошо направленной.

Пусть l есть длина части $0y$ кривой 0η, къ которой отнесенъ интегралъ (24). Предположимъ, что отношеніе $l:x$ для всѣхъ точекъ указаннаго звена не выходитъ изъ конечныхъ предѣловъ. Предположимъ еще, что длина l_1 кривой 0η, къ которой отнесенъ интегралъ (24), *конечная*. Вмѣстѣ съ тѣмъ допустимъ, что, кромѣ указанныхъ ограниченій относительно перваго главнаго условія, всѣ остальныя условія той или другой изъ вышеприведенныхъ теоремъ I и IV выполняются. При такихъ обстоятельствахъ останется въ силѣ все, сказанное въ соотвѣтствующихъ заключеніяхъ теоремъ I и IV, *и измѣнится лишь то, что касается опредѣленія предѣловъ величины* ρ_s.

Формулы (38) и (54) для опредѣленія этихъ предѣловъ, вошедшія въ соотвѣтствующія теоремы, придется видоизмѣнить въ виду того, что на нихъ неблагопріятно повліяютъ безконечныя значенія производной $\frac{dh}{dx}$, входящей въ равенство (37) (эти значенія обратятъ въ безконечность наибольшее значеніе μ модуля M). Сверхъ того основная въ этихъ выводахъ формула (36) можетъ при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ оказаться не имѣющею силы, такъ какъ формула эта выведена въ предположеніи, что перемѣнное x при движеніи точки y по кривой 0η отъ точки 0 до точки η постоянно возрастаетъ. Но это предположеніе теперь можетъ не выполняться, т. е. x можетъ при указанномъ движеніи точки y колебаться, то возрастая, то убывая.

Мы выведемъ здѣсь формулы, замѣняющія при настоящихъ условіяхъ прежнія выраженія ρ_s.

Преобразуемъ равенство (24), принявъ въ немъ за независимое перемѣнное длину l части $0y$ кривой 0η. Получимъ:

$$\rho_s = \int_0^{l_1} e^{-my} y^{\alpha_s} B_s \frac{dy}{dl} dl, \qquad (64)$$

гдѣ l_1 есть длина кривой 0η. Отсюда и изъ равенствъ:

$$y = x + hi \text{ и } \left|\frac{dy}{dl}\right| = 1$$

слѣдуетъ, что

$$|\rho_s| < \int_0^{l_1} e^{-mx} x^{\alpha'_s} \left|\left(1 + i\frac{h}{x}\right)^{\alpha_s} B_s\right| dl,$$

гдѣ α'_s есть дѣйствительная часть количества α_s. Пусть μ' есть количество, не меньшее наибольшаго значенія модуля выраженія

$$M' = \left(1 + \frac{h}{x} i\right)^{\alpha_s} B_s \tag{64'}$$

при возрастаніи l отъ 0 до l_1. Очевидно, будемъ имѣть:

$$|\rho_s| < \mu' \int_0^{l_1} e^{-mx} x^{\alpha'_s} dl. \tag{64''}$$

Замѣтимъ, что изъ равенствъ (10′) слѣдуетъ:

$$x = lg\frac{K_1}{R},$$

гдѣ $R = |\psi(z)|$, и обратимъ затѣмъ вниманіе на ходъ измѣненій количества x при возрастаніи l отъ 0 до l_1. Сначала количество x должно *возрастать* вмѣстѣ съ l, ибо модуль R функціи $\psi(z)$ при движеніи точки z по кривой $\zeta\xi$ отъ точки ζ сначала *убываетъ*. Такое возрастаніе количества x будетъ продолжаться *постоянно* до нѣкотораго maximum x_0, который выражается такъ:

$$x_0 = lg\frac{K_1}{R_0},$$

гдѣ R_0 есть minimum модуля R при вышеуказанномъ движеніи точки z. Для этого minimum должно имѣть силу неравенство:

$$R_0 \leqq K_2,$$

вытекающее изъ опредѣленія количества K_2. Вмѣстѣ съ тѣмъ, очевидно, будемъ имѣть:

$$e^{-x_0} = \frac{R_0}{K_1} \leqq \frac{K_2}{K_1}. \qquad (64''')$$

Пусть l_0 есть то значеніе l, при которомъ постоянно возрастающее отъ нуля количество x достигаетъ вышеуказаннаго значенія x_0.

Если $l_0 < l_1$, то при дальнѣйшемъ возрастаніи l отъ l_0 до l_1 количество x можетъ колебаться, то убывая, то возрастая. Но при всѣхъ этихъ измѣненіяхъ количество e^{-x} не можетъ превзойти предѣла $K_2 : K_1$, что вытекаетъ изъ свойствъ звена $\zeta\xi$ и изъ опредѣленія количества K_2. Итакъ, при $l_0 \leqq l \leqq l_1$ будемъ имѣть:

$$e^{-x} \leqq \frac{K_2}{K_1}. \qquad (65)$$

Имѣя въ виду эти замѣчанія, положимъ:

$$J_0 = \int_0^{l_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} \, dl, \qquad (65_1)$$

$$J_1 = \int_{l_0}^{l_1} e^{-mx} x^{\alpha'_s} \, dl, \qquad (65_2)$$

Интеграціей по частямъ убѣждаемся, что

$$J_0 = l_0 \, e^{-mx_0} \, x_0^{\alpha'_s} + J'_0, \qquad (65_3)$$

гдѣ

$$J'_0 = \int_0^{x_0} e^{-mx} x^{\alpha'_s} \frac{l}{x} (mx - \alpha'_s) \, dx. \qquad (65'_3)$$

Замѣняя здѣсь перемѣнное x при помощи формулы: $mx = u$, находимъ:

$$J'_0 = \frac{1}{m^{1+\alpha'_s}} \int_0^{mx_0} e^{-u} u^{\alpha'_s} \frac{l}{x} \cdot (u - \alpha'_s)\, du.$$

Полагая

$$\Phi(u) = e^{-\varepsilon u}\ (u - \alpha'_s),\ 0 < \varepsilon < 1,$$

имѣемъ:

$$J'_0 = \frac{1}{m^{1+\alpha'_s}} \int_0^{mx_0} e^{-(1-\varepsilon)u}\ u^{\alpha'_s} \frac{l}{x} \Phi(u)\, du.$$

При этомъ замѣчаемъ, что функція $\Phi(u)$ пріобрѣтаетъ наибольшее значеніе при

$$u = \alpha'_s + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Слѣдовательно, $\Phi(u) < \Phi\left(\alpha'_s + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ и

$$J'_0 < \frac{\Phi\left(\alpha'_s + \frac{1}{\varepsilon}\right)}{m^{1+\alpha'_s}} \int_0^{mx_0} e^{-(1-\varepsilon)u} u^{\alpha'_s} \frac{l}{x}\, du. \qquad (65_3'')$$

Замѣтимъ далѣе, что количество $\frac{l}{x}$ сохраняетъ конечное значеніе при малыхъ значеніяхъ x, такъ какъ количества:

$$\frac{l}{x} \text{ и } \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}$$

при $x = 0$ совпадаютъ, при чемъ второе изъ нихъ, по условію, сохраняетъ конечное значеніе для точекъ z звена $\zeta\xi$, близкихъ къ ζ. Слѣдовательно, отношеніе $l : x$ должно оставаться конечнымъ при возрастаніи x отъ 0 до x_0. Обозначимъ

чрезъ μ_0 *наибольшее* значенiе количества $l:x$ при указанномъ измѣненiи x. Очевидно, будемъ имѣть:

$$J'_0 < \frac{\mu_0\, \Phi\left(\alpha'_s + \frac{1}{\varepsilon}\right)}{m^{1+\alpha'_s}} \int_0^{mx_0} e^{-(1-\varepsilon)u}\, u^{\alpha'_s}\, du. \qquad (65_3''')$$

A fortiori

$$J'_0 < \frac{\mu_0\, \Phi\left(\alpha'_s + \frac{1}{\varepsilon}\right) \Gamma(1+\alpha'_s)}{\{(1-\varepsilon)\, m\}^{1+\alpha'_s}}.$$

Иначе:

$$J'_0 = \frac{\theta\, \mu'_0\, \Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}}, \quad 0 < \theta < 1, \qquad (65_4)$$

гдѣ

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0\, \Phi\left(\alpha'_s + \frac{1}{\varepsilon}\right)}{(1-\varepsilon)^{1+\alpha'_s}} = \frac{\mu_0\, e^{-1-\varepsilon\alpha'_s}}{\varepsilon\,(1-\varepsilon)^{1+\alpha'_s}}. \qquad (65'_4)$$

Если внесемъ сюда значенiе ε, при которомъ выраженiе $\varepsilon\,(1-\varepsilon)^{1+\alpha'_s}$ обращается въ maximum, то получимъ:

$$\mu'_0 = \mu_0\,(2+\alpha'_s) \left\{ \frac{2+\alpha'_s}{1+\alpha'_s} \cdot e^{-\frac{2}{2+\alpha'_s}} \right\}^{1+\alpha'_s}. \qquad (65''_4)$$

Далѣе разсмотримъ интегралъ J_1, опредѣляемый равенствомъ (65_2). Этотъ интегралъ представляется такъ:

$$J_1 = e^{-mg} \int_{l_0}^{l_1} M''\, dl, \qquad (65_5)$$

гдѣ g есть количество, опредѣляемое равенствомъ (61), и

$$M'' = e^{m(g-x)}\, x^{\alpha'_s}. \qquad (65_6)$$

При возрастаніи l отъ l_0 до l_1 имѣетъ силу неравенство (65), изъ котораго слѣдуетъ, что $g - x < 0$. При такихъ условіяхъ функція M'' при измѣненіи l отъ l_0 до l_1 не будетъ выходить изъ конечныхъ предѣловъ. При этомъ помощію неравенства (65) легко доказать, что функція M'' не превзойдетъ предѣла: $g^{\alpha'_s}$, если $mg > \alpha'_s$. Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (65_5) представится такъ:

$$J_1 = \theta_1 \, e^{-mg} \, g^{\alpha'_s} (l_1 - l_0), \quad 0 < \theta_1 < 1. \qquad (65_7)$$

Замѣтивъ, что сумма интеграловъ J_0 и J_1 представляетъ интегралъ, входящій во вторую часть неравенства (64''), приводимъ это неравенство при посредствѣ формулъ (65_3), (65_4) и (65_7) къ виду:

$$\rho_s = \lambda \mu' \left\{ \frac{\mu'_0 \, \Gamma(1 + \alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}} + l_0 \, x_0^{\alpha'_s} e^{-mx_0} \right.$$

$$\left. + e^{-mg} g^{\alpha'_s} (l_1 - l_0) \right\}, \ |\lambda| < 1. \qquad (66)$$

Помощію неравенства (64''') можемъ убѣдиться, что при $mg > \alpha'_s$ имѣетъ силу неравенство:

$$e^{-mx_0} x_0^{\alpha'_s} < e^{-mg} g^{\alpha'_s}.$$

Поэтому формулу (66) можно замѣнить болѣе простою:

$$\rho_s = \lambda \mu' \left\{ \frac{\mu'_0 \, \Gamma(1 + \alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}} + l_1 \, e^{-mg} g^{\alpha'_s} \right\}, |\lambda| < 1. \qquad (67)$$

Эта формула для опредѣленія предѣловъ количества ρ_s можетъ замѣнить прежнія формулы, служащія для той же цѣли. Вмѣстѣ съ тѣмъ выраженіе теоремъ I и IV можетъ быть видоизмѣнено въ томъ смыслѣ, чтобы въ нихъ второе главное условіе, указанное въ n^0 6, имѣло силу лишь вблизи главной точки ζ, при чемъ для всѣхъ точекъ z кривой $\zeta\xi$, отношеніе $l:x$ должно сохранять конечное значеніе и должна быть ко-

нечною длина кривой 0η. При такомъ видоизмѣненіи теоремъ I и IV и при выполненіи ихъ прочихъ условій, мы можемъ примѣнять эти теоремы къ звеньямъ основного пути ABC, обходясь *безъ отдѣленія ихъ второстепенныхъ частей*, т. е. разумѣя $\zeta\xi$ *полное* звено перваго рода. Видоизмѣненныя такимъ образомъ теоремы I и IV приводятъ къ важному въ теоретическомъ отношеніи общему выводу, который формулируемъ въ формѣ теоремы.

Теорема VI. *Пусть ζ есть главная точка основного пути ABC и $\zeta\xi$ есть* полное *звено перваго рода, принадлежащее этому пути. Предположимъ, 1) что для основного пути ABC выполняется первое главное условіе указанное въ § 3 (см. n° 4), 2) что путь 0η, описываемый точкой y, изображающей величину:*

$$y = \lg \frac{\psi(\zeta)}{\psi(z)} = x + hi,$$

при движеніи точки z по звену $\zeta\xi$, имѣетъ конечную длину и что при тѣхъ же измѣненіяхъ y и z отношеніе $\frac{l}{x}$ не выходитъ изъ конечныхъ предѣловъ, при чемъ l есть длина части $0y$ кривой 0η, 3) что функція $f(z)$ для точки $z = \zeta$ сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка ниже 1 и 4) что разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20) при условіяхъ (21), имѣетъ силу для всѣхъ точекъ z разсматриваемаго звена $\zeta\xi$, при чемъ модуль функціи B_s для тѣхъ же значеній z не выходитъ изъ конечныхъ предѣловъ. При этихъ предположеніяхъ приближенная величина интеграла $[\zeta\xi]$, представляемаго равенствомъ (16), опредѣляется по формулѣ:

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta) \left\{ \sum_{k=0}^{k=s-1} \frac{A_k \Gamma(1+\alpha_k)}{m^{1+\alpha_k}} + \Delta_s \right\},$$

въ которой погрѣшность Δ_s есть малое количество порядка не ниже $1 + \alpha'_s$ относительно $\frac{1}{m}$.

При выраженіи этой общей теоремы мы, по примѣру другихъ авторовъ, ограничились лишь указаніемъ порядка малой величины Δ_8, выразивъ условія этой теоремы съ большею полнотою и строгостью. Но если хотимъ, опираясь на изложенный пріемъ, получить предѣлы количествъ ρ_8 и Δ_8, то можемъ для этой цѣли прибѣгнуть къ формуламъ (66) и (56) или (56_4).

Надлежитъ замѣтить, что указанный здѣсь пріемъ имѣетъ, между прочимъ, теоретическій интересъ, весьма важный въ виду того, что этотъ пріемъ не налагаетъ на форму пути ABC другихъ ограниченій, кромѣ необходимыхъ. Форму эту, слѣдовательно, если и полезно ограничивать, то лишь съ цѣлію или упростить результаты или повысить степень ихъ чувствительности въ оцѣнкѣ погрѣшностей.

Но оказывается, что при достиженіи послѣдней цѣли, т. е. при подчиненіи формы пути ABC требованію, чтобы формулы (66) и (56_4) были достаточно чувствительны для оцѣнки предѣловъ погрѣшности Δ_8, приходимъ къ затрудненіямъ въ *особыхъ случаяхъ перваго рода* (см. n^0 5), въ которыхъ играетъ роль критическое значеніе K_2, стремящееся къ K_1. Въ этихъ случаяхъ особенно желательно повышеніе чувствительности вышеприведенныхъ формулъ для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_8. Съ этою цѣлію возможно понизить K_2. Критическое значеніе K_2 есть хотя и minimum K_2, однако *обусловленный* хорошимъ направленіемъ основного пути ABC и, слѣдовательно, допускающій *пониженіе*, если искать *безусловный* minimum K_2, который бываетъ вообще ниже условного. Вмѣстѣ съ тѣмъ такое пониженіе количества K_2 могло бы служить для полученія болѣе чувствительныхъ предѣловъ количествъ δ_k вида (27′), вліяющихъ на погрѣшность Δ_8. Казалось бы, поэтому, нужно предпочесть этотъ пріемъ, который даетъ возможность *понизить* K_2 даже до его *безусловнаго* minimum, каковое значеніе K_2 часто совпадаетъ съ нулемъ и устраняетъ изъ выраженія погрѣшности Δ_8 всѣ члены, кромѣ ρ_8. Но, однако, такое упрощеніе вычисленій въ одномъ пунктѣ ведетъ къ затрудненію въ другомъ. Предѣлы ρ_8 при этомъ иногда оказываются грубыми, что̀ объясняется особенными свойствами

измѣненій функціи B_s, опредѣляемой уравненіями (19) и (20), и отношенія $l:x$. Измѣненія функціи B_s вліяютъ на количество μ', входящее въ формулу (66), при чемъ, какъ будетъ выяснено ниже (въ n^0 12), въ особомъ случаѣ перваго рода часть $0\eta''$ кривой 0η, соотвѣтствующая главной части $\zeta\xi''$ звена $\zeta\xi$, можетъ оказаться *не хорошо направленною* (см. n° 4) и притомъ *проходящею въ безконечной близости къ особой точкѣ функціи* B_s. Если для этой особой точки функція B_s обращается въ безконечность, то количество μ' будетъ весьма большимъ. Далѣе, для нехорошо направленной главной части звена $\zeta\xi$ наибольшее значеніе отношенія $l:x$, обозначенное выше чрезъ μ_0 и входящее въ формулы ($65_3'''$) и (66) или (67), въ особомъ случаѣ перваго рода также будетъ весьма большимъ.

Вообще нужно сказать, что внимательное изученіе членовъ погрѣшности Δ_s, котораго до сихъ поръ не дѣлалось надлежащимъ образомъ, приводитъ къ многимъ важнымъ результатамъ. Такое изученіе мы продолжимъ въ слѣдующихъ *nn*°.

n° 11. Въ отношеніи порядка малости отдѣльные члены вторыхъ частей равенствъ (56) и (61′), сложеніемъ которыхъ получается погрѣшность Δ_s', опредѣляемая равенствомъ (62′), распадаются на двѣ категоріи: 1) члены порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$ и 2) члены *конечнаго* порядка относительно $\frac{1}{m}$.

Ко второй категоріи принадлежитъ единственный членъ ρ_s, опредѣляемый равенствомъ (24) и представленный различными вышеуказанными формулами, служащими для полученія его предѣловъ. Особаго вниманія заслуживаютъ формула (66) и формула, которая представлена въ теоремѣ IV такъ:

$$\rho_s = \frac{\lambda\,\mu\,\Gamma(1+\alpha'_s)}{m^{1+\alpha'_s}}, \tag{68}$$

гдѣ $|\lambda| < 1$ и μ есть наибольшій модуль количества (37) при измѣненіи x отъ 0 до x_0 (иначе, при движеніи z по кривой $\zeta\xi$). Объ этомъ членѣ будемъ говорить ниже (въ n^0 12).

Къ первой же категоріи принадлежатъ всѣ остальные вышеупомянутые члены погрѣшности Δ'_s. Эти члены имѣютъ общій множитель e^{-mg}, равный $(K_2 : K_1)^m$, и въ совокупности представляютъ собою величину:

$$\Delta''_s = e^{-m\eta} \left\{ \sum_{(-)} \frac{\lambda_k \eta^{\alpha'_k} e^{-\gamma_k}}{m} + \sum_{(+)} \frac{\lambda_k (x_0 + h_1)^{\alpha'_k} e^{-\gamma_k}}{m - \frac{\alpha'_k}{x_0 + h_1}} \right\} + \\ + \lambda'' l_1 \mu_1 e^{-mg} . \qquad (69)$$

При выполненіи перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4), эта величина Δ_s'' уничтожается при возрастаніи m до ∞ и убываетъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ менѣе отношеніе $K_2 : K_1$ или чѣмъ болѣе количество

$$g = \lg \frac{K_1}{K_2} . \qquad (70)$$

Эту величину g назовемъ *мѣрою быстроты* убыванія предѣловъ количества Δ_s'', опредѣляемыхъ равенствомъ (69). Модуль количества Δ_s'' есть нуль, если $g = \infty$, и высшій предѣлъ этого модуля быстро убываетъ при возрастаніи m, если g велико. Напротивъ, тотъ же предѣлъ модуля Δ_s'' при возрастаніи m будетъ убывать медленно, если мѣра быстроты весьма близка къ нулю. Въ предѣлѣ же, когда эта мѣра для *критическаго* значенія K_2 обращается въ нуль, мы будемъ имѣть дѣло съ особымъ случаемъ *перваго рода*, указаннымъ въ § 3 (n^0 5) и требующимъ вообще отдѣльнаго изслѣдованія, ходъ котораго будетъ изъясненъ ниже (въ § 6).

Но изъ указаннаго еще не слѣдуетъ, что въ разсматриваемомъ процессѣ вычисленія представляется выгоднымъ увеличивать g до maximum, т. е. доводить деформаціей пути ABC количество K_2 до безусловнаго minimum, каковое значеніе K_2 часто бываетъ нулемъ. Дѣло въ томъ, что уменьшеніе K_2 можетъ неблагопріятно отражаться на членѣ ρ_s первой категоріи, входящемъ въ составъ погрѣшности Δ'_s. По этой причинѣ въ раз-

сматриваемомъ исчисленіи безусловный minimum K_2 играетъ менѣе важную роль, чѣмъ другія значенія K_2, напримѣръ, критическое значеніе (представляющее minimum K_2, обусловленный хорошимъ направленіемъ пути ABC, указаннымъ въ $n^0$4) и то значеніе, которое въ § 8 названо ***нормальнымъ***.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію члена ρ_s второй категоріи.

n^0 12. Изслѣдованіе того члена указанной выше погрѣшности Δ_s', порядокъ котораго относительно $\frac{1}{m}$ представляется конечнымъ числомъ не ниже $\alpha'_s + 1$, т. е. члена ρ_s, опредѣляемаго равенствомъ (24) и представляемаго подъ видами (66) и (68), приводитъ насъ какъ къ раскрытію важнѣйшихъ свойствъ *критическаго* значенія K_2 и *особыхъ случаевъ перваго рода*, такъ къ *особымъ случаямъ второго рода*.

Свойства ρ_s, какъ видно изъ вышеприведенныхъ формулъ и теоремъ, обусловливаются характеромъ измѣненій величины B_s, опредѣляемой равенствами (19) и (20), на протяженіи пути $\zeta\xi$ интегрированія и связаны съ характеромъ и положеніемъ особыхъ точекъ функціи

$$\Pi(y) = f(z) \frac{dz}{dy}. \tag{71}$$

Начнемъ съ понятія объ особыхъ случаяхъ *второго* рода.

Вообразимъ, что основной путь ABC выбранъ такъ, чтобы на протяженіи пути 0η, къ которому отнесены интегралы, указанные во второй части равенства (23), не было особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$, кромѣ точки $y = 0$. Такой выборъ, какъ увидимъ въ § 8, вообще возможенъ. При этомъ выборѣ тѣмъ не менѣе можетъ быть особенное вліяніе особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$ на величину ρ_s въ слѣдующихъ случаяхъ. Во-первыхъ, особая точка $y = 0$ можетъ быть такова, что разложеніе (19) подъ условіемъ, чтобы величина B_s, опредѣляемая равенствами (19) и (20), сохраняла при $y = 0$ конечное значеніе, и чтобы при этомъ дѣйствительная часть количества α_s была болѣе дѣйствительной части α_0, оказывается *не возможнымъ*. Во-вторыхъ, при возможности такого разложенія область годности его можетъ

быть безконечно малая, такъ какъ можетъ существовать другая особая точка функціи $\Pi(y)$, не совпадающая съ точкой $y=0$, но *безконечно близкая* къ ней. Какъ тотъ, такъ и другой случай мы будемъ называть *особыми случаями второго рода*, требующими отдѣльнаго разсмотрѣнія. Въ первомъ случаѣ теряютъ силу всѣ прежніе выводы наши относительно ρ_s. Во второмъ случаѣ, т. е. если въ числѣ особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$, не совпадающихъ съ $y=0$, есть весьма близкія къ точкѣ $y=0$, эта близость отражается неблагопріятно на выраженіи (68) члена ρ_s, чрезмѣрно увеличивая величину μ, входящую въ это выраженіе.

Подробное разсмотрѣніе особыхъ случаевъ второго рода представлено ниже (въ § 7).

Переходя къ *особымъ случаямъ перваго рода*, о которыхъ понятіе уже дано въ n^0 5, замѣтимъ, что понятіе это связано непосредственно со свойствами отношенія $K_2 : K_1$, соотвѣтствующаго *критическому* значенію K_2. Докажемъ здѣсь, что и эти особые случаи имѣютъ отношеніе къ особымъ точкамъ функціи $\Pi(y)$ и притомъ къ такимъ, кои могутъ быть отдалены отъ точки $y=0$ на *конечное* разстояніе.

Представимъ себѣ кривую $\alpha 0 \gamma$, описываемую точкой y въ то время, когда точка z проходитъ основной путь ABC. Эту кривую будемъ называть *преобразованнымъ* основнымъ путемъ интегрированія.

Главныя точки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ преобразованнаго основного пути $\alpha 0 \gamma$ связаны съ главными точками основного пути ABC уравненіями:

$$y_k = \lg \frac{\psi(\zeta)}{\psi(\zeta_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (71_1)$$

Въ числѣ главныхъ точекъ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ находится точка $y=0$. Пусть y_ε есть точка, занимающая въ ряду $y_1, y_2, \ldots, y_n$ одно изъ *смежныхъ* положеній съ точкою $y=0$. Пусть 0η и ηy_ε будутъ звенья основного пути $\alpha 0 \gamma$, составляющія вмѣстѣ его часть $0 y_\varepsilon$.

Замѣтимъ далѣе, что всѣ вообще главныя точки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ преобразованнаго основного пути $\alpha 0 \gamma$ расположены на одной и той же прямой, совпадающей съ *мнимою* осью плоскости комплекснаго перемѣннаго y. Всѣ же остальныя точки кривой $\alpha 0 \gamma$ расположены по одну и ту же сторону мнимой оси, а именно—въ области *положительныхъ* абсциссъ x. Вслѣдствіе подобія кривыхъ $\alpha 0 \gamma$ и ABC въ безконечно малыхъ частяхъ, *соотвѣтственныя* главныя вѣтви того и другого пути бываютъ одновременно направлены попарно или обѣ хорошо, или обѣ нехорошо (см. n^0 4). Далѣе преобразованный основной путь $\alpha 0 \gamma$ можно консервативно деформировать такъ, чтобы оставался неизмѣннымъ интегралъ

$$J = \int_{(\alpha 0 \gamma)} e^{-my} \, \Pi(y) \, dy \,, \qquad (71_2)$$

совпадающій съ интеграломъ $[ABC]$. При этомъ иглы, задерживающія перемѣщеніе нити $\alpha 0 \gamma$, должны быть укрѣплены во всѣхъ особыхъ точкахъ функціи $\Pi(y)$.

Вообразимъ теперь, что существуютъ такія особыя точки

$$y', \; y'', \; y''', \ldots \qquad (71_3)$$

функціи $\Pi(y)$, которыя, имѣя *положительныя* абсциссы, не лежатъ на кривой $\alpha 0 \gamma$, но нѣкоторыя части αy_1, $y_1 y_2$, $y_2 y_3, \ldots, y_n \gamma$ этой кривой должны проходить *между* мнимою осью и этими точками. Напримѣръ, пусть вышеуказанная часть $0 y_1$ пусть должна проходить между названною осью и особой точкой y'. Далѣе вообразимъ, что функція $\Pi(y)$ и предѣлы α и γ интеграціи зависятъ отъ нѣкоторыхъ параметровъ, способныхъ измѣняться. При этомъ всѣ вообще особыя точки функціи $\Pi(y)$ и вышеуказанная группа особыхъ точекъ (71_3) могутъ съ непрерывнымъ измѣненіемъ параметровъ перемѣщаться. Пусть при этомъ перемѣщаются и соотвѣтствующія этимъ особымъ точкамъ иглы, а при встрѣчѣ этихъ иглъ съ нитью $\alpha 0 \gamma$ пусть онѣ этимъ своимъ движеніемъ ее пе-

ремѣщаютъ, деформируя. Пусть далѣе первоначальное положеніе пути $\alpha 0 \gamma$ таково, что всѣ главныя части его хорошо направлены. Затѣмъ при непрерывномъ измѣненіи параметровъ пусть поддерживается хорошее направленіе всѣхъ главныхъ частей пути $\alpha 0 \gamma$, пока это возможно. Но предположимъ, что перемѣщеніе нѣкоторыхъ изъ особыхъ точекъ (71_3) состоитъ въ *неограниченномъ* приближеніи ихъ къ мнимой оси, на которую онѣ стремятся вступить. Вмѣстѣ съ тѣмъ иглы, соотвѣтствующія этимъ точкамъ, *будутъ*, *деформируя*, *придвигать къ мнимой оси тѣ вѣтви кривой* $\alpha 0 \gamma$ *кои, проходятъ между мнимою осью и этими точками.* Напримѣръ, точка y', которая пусть неограниченно приближается къ мнимой оси, будетъ придвигать къ названной оси вѣтвь $0y_i$. При безконечной близости точки y' къ мнимой оси, по крайней мѣрѣ одна изъ главныхъ частей звеньевъ 0η и ηy_i, *первоначально направленныхъ хорошо*, утратитъ это свойство и сдѣлается *нехорошо направленной* (пусть эта вѣтвь есть 0η). Вмѣстѣ съ тѣмъ значеніе K_2, если оно не сдѣлалось безконечно близкимъ къ K_1, не будетъ критическимъ. Критическое же значеніе K_2 мы получимъ лишь послѣ устраненія указаннаго нехорошаго направленія основного пути $\alpha 0 \gamma$, превращая этотъ путь консервативною деформаціей въ хорошо направленный. При этомъ критическое значеніе K_2 сдѣлается *безконечно близкимъ къ* K_1, *т. е. получится особый случай перваго рода.*

Замѣтимъ, что упомянутое сейчасъ нехорошее направленіе главной части $0\eta''$ вѣтви 0η, вызванное безконечнымъ приближеніемъ точки y' къ мнимой оси, сопровождается тѣмъ обстоятельствомъ, *что кривая* 0η *будетъ проходить въ безконечной близости къ особой точкѣ* y', которая притомъ можетъ вообще находиться на *конечномъ* разстояніи отъ точки $y = 0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ, если взять некритическое значеніе K_2, то формула (66), примѣненная къ нехорошо направленной вѣтви $0\eta''$ обнаружитъ, какъ было упомянуто въ n^0 10 (пункт. II), недостатки не только вслѣдствіе направленія главной части $0\eta''$ вѣтви 0η, но и вслѣдствіе вліянія указанной точки y', которая будетъ особою точкою функціи B_s, опредѣляемой уравненіями (19) и

(20). Если же, обратившись къ хорошему направленію звена 0η, взять критическое значеніе K_1, то сдѣлаются нечувствительными формулы для опредѣленія предѣловъ погрѣшностей δ_k. Изъ этихъ затрудненій возможенъ выходъ лишь при помощи новыхъ пріемовъ и понятій.

Мы близки теперь къ новому понятію о подглавныхъ точкахъ, устраняющему затрудненія, связанныя съ особыми случаями перваго рода. Но это понятіе выяснится отдѣльно въ § 6.

Теперь же необходимо остановить вниманіе на соприкасающемся съ особыми случаями того и другого рода вопросѣ относительно особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$, опредѣляемой равенствомъ (71). Этотъ вопросъ вообще имѣетъ весьма важное значеніе въ разсматриваемомъ исчисленіи. Такъ, отъ положенія особой точки функціи $\Pi(y)$, ближайшей къ точкѣ $y=0$, зависитъ кругъ сходимости разложенія функціи $\Pi(y)$ въ безконечный рядъ по степенямъ y. Хотя, какъ мы видѣли, сходимость эта не играла рѣшительной роли при выводѣ теоремъ I—VI, но подъ условіемъ, что кривая 0η не проходитъ чрезъ особыя точки функціи $\Pi(y)$ или вблизи ихъ. Нарушить это условіе въ случаяхъ сложныхъ или общихъ легко, если слишкомъ смѣло оперировать съ построеніемъ пути 0η;—и лишь при положеніи кривой 0η *внутри* указаннаго круга сходимости мы навѣрное обезпечимъ наши общіе выводы и результаты отъ нарушенія упомянутаго сей-часъ условія. Такую прочную опору общія задачи разсматриваемаго исчисленія найдутъ, какъ сейчасъ убѣдимся, въ теоріи ряда Лагранжа. При этомъ, какъ увидимъ, выходить изъ круга сходимости этого ряда для главныхъ частей основнаго пути ABC (см. n^0 4) при обыкновенныхъ условіяхъ даже и не представляется необходимости, такъ что теоремы I—VI во всей области ихъ примѣнимости получаютъ въ названной теоріи достаточную опору.

Особыя точки функціи $\Pi(y)$, не совпадающія съ точкой $y=0$, подраздѣлимъ на два класса.

I. Къ первому классу особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$ отнесемъ тѣ, которыя соотвѣтствуютъ особымъ точкамъ функціи

$$f(z)\,\psi^m(z).$$

Этимъ точкамъ соотвѣтствуютъ указанныя въ § 2 твердыя, безконечно тонкія иглы, задерживающія гибкую нить, изображающую деформируемый путь abc интеграціи.

II. Ко второму классу особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$ отнесемъ особыя точки, вводимыя преобразованіемъ перемѣннаго z при посредствѣ уравненія (17). Изслѣдованіе этихъ точекъ приводитъ насъ къ изслѣдованію особыхъ точекъ количества z, какъ функціи перемѣннаго y, опредѣляемой уравненіемъ (17), которое приводится къ виду:

$$\lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z) = y. \tag{72}$$

Эту функцію обозначимъ такъ: $z = Z(y)$. Ея особыя точки и суть точки, причисленныя ко второму классу, по поводу которыхъ сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія.

Если ζ не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и если въ ряду величинъ: $\psi'(\zeta)$, $\psi''(\zeta), \ldots, \psi^k(\zeta), \ldots$ первая отличная отъ нуля есть $\psi^{(\nu)}(\zeta)$, то уравненіе $\lg\psi(z) = \lg\psi(\zeta)$ имѣетъ ν—кратный корень $z = \zeta$, и, слѣдовательно, уравненіе (72) приводится къ виду:

$$(z-\zeta)^\nu = y\,\Theta^\nu(z), \tag{73}$$

гдѣ $\Theta(z)$ есть функція, сохраняющая при $z = \zeta$ отличное отъ нуля значеніе и голоморфная въ области точки $z = \zeta$. Эта функція опредѣляется равенствомъ:

$$\Theta(z) = \left\{\frac{(z-\zeta)^\nu}{\lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z)}\right\}^{\frac{1}{\nu}}, \tag{74}$$

при чемъ уравненіе (73) приводится къ виду:

$$z-\zeta = y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(z), \tag{75}$$

къ которому примѣняется рядъ Лагранжа, опредѣляющій вышеуказанную функцію $z=Z(y)$. Прежде всего замѣтимъ, что при $\nu>1$, т. е. при условіи:

$$\psi'(\zeta)=0, \tag{76}$$

сама точка $y=0$ есть особая точка функціи $Z(y)$, такъ какъ функція эта въ области указанной точки разлагается по дробнымъ степенямъ y.

Что̀ касается остальныхъ особыхъ точекъ функціи $Z(y)$, то, какъ извѣстно изъ теоріи ряда Лагранжа, примѣненнаго къ уравненію (75), особыя точки эти, не совпадающія съ особыми точками перваго класса, соотвѣтствуютъ тѣмъ значеніямъ y, при которыхъ уравненіе (72) имѣетъ либо безконечный, либо кратный корень z. Кратный корень долженъ удовлетворять условію:

$$\psi'(z)=0, \tag{77}$$

которое и можетъ послужить для опредѣленія особыхъ точекъ второго класса.

Особыхъ точекъ второго класса не существуетъ вовсе лишь въ простѣйшихъ случаяхъ, напримѣръ, когда $\psi(z)=e^{az+b}$ или $\psi(z)=z^{\pm 1}$. Въ подобныхъ случаяхъ всѣ особыя точки функціи $\Pi(y)$ принадлежатъ лишь къ первому классу.

Замѣтимъ попутно, что рядъ Лагранжа, примѣненный къ уравненію (75), даетъ, какъ извѣстно, разложенія различныхъ функцій корня z, и что посредствомъ такихъ функцій представляется и функція $\Pi(y)$. Такимъ образомъ, и при полученіи разложенія функціи $\Pi(y)$ въ въ безконечный рядъ, какъ увидимъ, играетъ роль рядъ Лагранжа и кругъ его сходимости. При опредѣленіи этого круга имѣютъ значеніе обѣ категоріи особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$.

Но изъ этихъ точекъ особенный интересъ представляютъ тѣ, кои *ближе* всѣхъ остальныхъ отстоятъ отъ точки $y=0$. Эти точки лежатъ на окружности круга сходимости разложенія функціи $\Pi(y)$ въ безконечный рядъ, и изысканіе ихъ вводитъ насъ въ тонкіе вопросы теоріи ряда Лагранжа. Однако, если

этотъ кругъ сходимости не безконечно малъ, то при изысканіи разложенія функціи П (y) подъ видомъ (19) можно обойтись болѣе простою изъ теоремъ о рядѣ Лагранжа, теоремою Коши-Руше, такъ какъ для построенія кривой 0η, длина которой отчасти зависитъ отъ нашего выбора, можно довольствоваться не полнымъ кругомъ сходимости, а лишь нѣкоторою его частью, ограниченною концентрическою окружностью. Къ такому примѣненію теоріи ряда Лагранжа съ теоремою Коши-Руше мы сейчасъ перейдемъ. Но предварительно сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе относитольно ρ_s и относительно выбора *хорошаго направленія* пути $\zeta\xi$, отъ чего зависятъ важныя облегченія при опредѣленіи предѣловъ количества ρ_s.

При благопріятномъ размѣщеніи особыхъ точекъ функціи П(y) относительно пути 0η, входящаго въ равенство (24), (напримѣръ, при положеніи кривой 0η внутри круга сходимости разложенія функціи П (y) въ безконечный рядъ по степенямъ y) можемъ получить слѣдующую особенно удобную формулу для опредѣленія высшаго предѣла модуля члена ρ_s. Предположимъ, *что между указанною кривою* 0η *и хордою, стягивающею ея точки* 0 *и* η, *нѣтъ особыхъ точекъ функціи* П (y). Въ такомъ случаѣ интегралъ (24) можемъ отнести къ указанной хордѣ и затѣмъ, полагая:

$$y = \eta u,$$

представить равенство (24) въ формѣ:

$$\rho_s = \eta^{\alpha_s + 1} \int_0^1 e^{-m\eta u} u^{\alpha_s} B_s \, du. \qquad (78)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$|\rho_s| < |\eta^{\alpha_s + 1}| \mu \int_0^1 e^{-m x_0 u} u^{\alpha'_s} \, du, \qquad (78')$$

гдѣ x_0 и α_s' суть дѣйствительныя части количествъ η и α_s и μ есть наибольшій модуль функціи B_s при движеніи y по *прямой* отъ точки 0 до точки η. Иначе,

$$\rho_s = \lambda\eta^{\alpha_s+1}\mu\int_0^1 e^{-mx_0u}u^{\alpha'_s}\,du = \frac{\lambda\eta^{\alpha_s+1}\mu Q(\alpha'_s)}{(mx_0)^{\alpha'_s+1}}\,,\ |\lambda|<1, \tag{79}$$

гдѣ

$$Q(\alpha'_s) = \int_0^{mx_0} e^{-v}v^{\alpha'_s}dv < \Gamma(1+\alpha'_s). \tag{79'}$$

Очевидно, при вышеуказанномъ условіи возможности приведенія интеграла (24) къ виду (78) путь $\zeta\xi$ можно консервативною деформаціей привести въ такое положеніе, чтобы соотвѣтствующій ему преобразованный путь 0η былъ *прямолинейнымъ*. Въ такомъ случаѣ путь $\zeta\xi$, если выполняется условіе (15), послѣ деформаціи останется *хорошо направленнымъ* въ томъ смыслѣ, какъ разъяснено въ n^0 4. При этомъ, какъ легко убѣдиться изъ разсмотрѣнія конформныхъ фигуръ, описываемыхъ точками z и y, путь $\zeta\xi$ долженъ пересѣкать всѣ изомодулярныя кривыя L_x подъ *постояннымъ* угломъ, равнымъ амплитудѣ количества η.

Формулами (78) и (79) мы сейчасъ воспользуемся.

n^0 13. Разложеніе (19) функціи

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy},$$

гдѣ z и y связаны соотношеніемъ (17), по степенямъ y можетъ быть получено при помощи ряда Лагранжа, а относящаяся къ этому ряду теорема Коши-Руше, приведенная выше (въ § 1, пункт. III) и допускающая указанныя въ главѣ III диссертаціи «Рядъ Лагранжа» видоизмѣненія, освобождающія ее отъ нѣкоторыхъ ограниченій, даетъ въ простой формѣ признаки того, выполняются ли условія, необходимыя для примѣненія

изложенныхъ процессовъ приближеннаго вычисленія интеграла $[\zeta\xi]$.

Теорія ряда Лагранжа съ указанною цѣлію примѣняется къ уравненію (75), въ которомъ при $\nu > 1$ выраженію

$$y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(z), \tag{79''}$$

имѣющему ν значеній, нужно приписать *опредѣленное* значеніе, соотвѣтствующее путямъ 0η и $\zeta\xi$. Одному только пути 0η, описываемому точкой y, соотвѣтствуетъ ν кривыхъ, описываемыхъ корнями z уравненія (73), измѣняющимися отъ ζ. Въ числѣ этихъ ν кривыхъ находится кривая $\zeta\xi$, которую и нужно отличить надлежащимъ выборомъ соотвѣтствующаго значенія функціи (79″). Значеніе это выбирается такъ, чтобы корень $z = Z(y)$, разлагающійся въ рядъ Лагранжа, примѣненный къ уравненію (75), описывалъ путь $\zeta\xi$ въ то время, когда точка y описываетъ кривую 0η. Пусть это значеніе выбрано и подразумѣвается въ послѣдующихъ вычисленіяхъ.

При помощи уравенія (75) и результата его дифференцированія находимъ:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y^{\frac{1}{\nu}-1}\,\Theta^2(z)}{\nu\{\Theta(z) - (z-\zeta)\,\Theta'(z)\}} \tag{80}$$

Слѣдовательно

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy} = \frac{y^{\frac{1}{\nu}-1}\,\Theta^2(z)\,f(z)}{\nu\{\Theta(z) - (z-\zeta)\Theta'(z)\}}. \tag{81}$$

Далѣе наложимъ пока ограниченіе на функцію $f(z)$, предполагая, что она представляется такъ:

$$f(z) = (z-\zeta)^{\beta-1}\,\varphi(z), \tag{82}$$

гдѣ $\varphi(z)$ есть функція голоморфная въ области точки $z = \zeta$ и не обращающаяся въ нуль при $z = \zeta$. (Ниже, по возможности, освободимся отъ этого ограниченія). При помощи уравненія (75) равенство (82) приводится къ виду:

$$f(z) = y^{\frac{\beta-1}{\nu}}\,\Theta^{\beta-1}(z)\,\varphi(z). \tag{82'}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (81) представляется такъ:

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy} = y^{\frac{\beta-\nu}{\nu}} \,.\, H(z), \tag{83}$$

гдѣ

$$H(z) = \frac{\Theta^{\beta+1}(z)\, \phi(z)}{\nu\{\Theta(z) - (z-\zeta)\,\Theta'(z)\}}. \tag{84}$$

Очевидно функція H (z) голоморфная въ области $z=\zeta$ и не обращается въ нуль при $z=\zeta$.

Примѣняя къ уравненію (75) и къ этой функціи H (z) теорему Коши - Руше (см. § 1, пункт. III), мы должны положить $z=\zeta+w$, чтобы привести уравненіе (75) къ виду (5). Затѣмъ надлежитъ выбрать положительное количество r такъ, чтобы оно было менѣе разстоянія точки ζ отъ ближайшей особой точки функцій Θ (z) и H (z). Пусть такое r выбрано и пусть N и M будутъ модули maximum maximorum функцій

$$H'(\zeta+re^{\omega i}) \text{ и } \frac{1}{r}\,\Theta(\zeta+re^{\omega i})$$

при возрастаніи ω отъ 0 до 2π. Предположимъ, что количество y удовлетворяетъ условію:

$$|\,y\,|\, M^{\nu} < 1. \tag{85}$$

Такъ какъ при этомъ будутъ выполнены всѣ условія теоремы Коши-Руше, то будемъ имѣть:

$$H(z) = H(\zeta) + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{y^{\frac{k}{\nu}}}{1.2\ldots k}\, \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}$$

$$+\frac{\lambda.rN}{s}\cdot\frac{y^{\frac{s}{\nu}} M^s}{1-|\,y^{\frac{1}{\nu}}\,|\,M}, \qquad |\,\lambda\,| < 1. \tag{86}$$

Отсюда и изъ равенства (83) слѣдуетъ, что разложеніе, опредѣляемое равенствами (19) и (20), въ данномъ случаѣ представится въ слѣдующей формѣ:

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy} = H(\zeta)\, y^{\frac{\beta-\nu}{\nu}} + \tag{87}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{y^{\frac{\beta+k-\nu}{\nu}}}{1.2\ldots k} \cdot \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + R_s,$$

гдѣ

$$R_s = y^{\frac{\beta+s-\nu}{\nu}} \cdot B_s, \tag{87'}$$

$$B_s = \frac{\lambda.\frac{r}{s}.N.M^s}{1-|y^{\frac{1}{\nu}}|\,M}, \qquad |\lambda| < 1. \tag{87''}$$

Условіе (85) будетъ имѣть силу для всѣхъ точекъ y кривой 0η, если

$$v\,M^\nu < 1, \tag{88}$$

гдѣ v есть *наибольшій* изъ модулей соотвѣтствующихъ величинъ y, т. е. наибольшій модуль количества

$$y = \lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z)$$

для точекъ z кривой $\zeta\xi$.

Пусть выполняются условія (88) и (15) и первое главное условіе, указанное въ § 3 (n^0 4), и пусть имѣетъ силу неравенство:

$$\beta' > 0, \tag{88'}$$

гдѣ β' есть дѣйствительная часть β. При этомъ будутъ выполнены всѣ условія для примѣненія въ данномъ случаѣ формулъ (23) и (24). Сверхъ того, *выполняются также всѣ условія для примѣненія формулъ (78) и (79), опредѣляющихъ предѣлы*

погрѣшности члена ρ_s. Въ самомъ дѣлѣ, если условіе (85) выполняется для всѣхъ точекъ y кривой 0η, то вся эта кривая и вся ея хорда, соединяющая точки 0 и η, помѣщаются въ кругѣ *(O),* описанномъ изъ центра O радіусомъ $r_0 = M^{-\nu}$, каковой кругъ занимаетъ *часть круга сходимости Лагранжева ряда,* представляющаго функцію $H(z)$, при чемъ въ этомъ кругѣ, кромѣ точки $y=0$, не можетъ быть никакихъ особыхъ точекъ функціи $\Pi(y)$, ибо она имѣетъ форму (83). Вмѣстѣ съ тѣмъ самый путь $\zeta\xi$ можно деформаціей привести въ такое *хорошо направленное* положеніе, чтобы кривая 0η слилась съ своею хордою 0η. Послѣ этого будутъ выполнены всѣ условія теоремъ, служащихъ для опредѣленія приближенной величины интеграла $[\zeta\xi]$ и предѣловъ погрѣшности этой величины.

Примѣняя въ данномъ случаѣ формулы (78) и (79) и принимая во вниманіе равенства (87′) и (87″), находимъ:

$$\rho_s = \eta^{\frac{\beta+s}{\nu}} \int_0^1 e^{-m\eta u}\, u^{\frac{\beta+s-\nu}{\nu}}\, B_s du =$$

$$= \frac{\lambda \cdot \eta^{\frac{\beta+s}{\nu}} \cdot \frac{r}{s} \cdot N . M^s}{1 - |\eta|^{\frac{1}{\nu}} M} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{(m x_0)^{\frac{\beta'+s}{\nu}}}, \qquad (89)$$

гдѣ $|\lambda| < 1$.

Изъ теоремы Коши-Руше слѣдуетъ, между прочимъ, что, при выполненіи условія (88), весь путь $\zeta\xi$ долженъ помѣщаться внутри круга, описаннаго изъ центра ζ радіусомъ r.

Соединяя вмѣстѣ изложенные выводы и примѣняя для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_s формулу (56_4), приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема VII. *Пусть главная точка ζ основного пути ABC не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$. Положимъ:*

$$\Theta(z) = \left\{\frac{(z-\zeta)^\nu}{\lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z)}\right\}^{\frac{1}{\nu}},$$

$$y = \frac{(z-\zeta)^\nu}{\Theta^\nu(z)} = \lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z),\quad \eta = \lg\psi(\zeta) - \lg\psi(\xi),$$

$$H(z) = \frac{\Theta^{\beta+1}(z).\mathfrak{f}(z)}{\nu\{\Theta(z) - (z-\zeta)\,\Theta'(z)\}},$$

гдѣ $\mathfrak{f}(z)$ *есть функція голоморфная въ области точки* $z=\zeta$ *и не обращающаяся въ нуль при* $z=\zeta$. *Пусть* $\zeta\xi$ *есть часть основного пути* ABC *и* 0η *есть кривая, описываемая точкой* y *въ то время, когда точка* z *проходитъ путь* $\zeta\xi$. *Если* $\nu>1$, *то выраженіе* $y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(z)$, *имѣющее* ν *значеній, выберемъ такъ, чтобы корень уравненія*

$$z - \zeta = y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(z), \tag{90}$$

разлагающійся въ рядъ

$$z = \zeta + y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(\zeta) + \ldots$$

по формулѣ Лагранжа, изображался точкой z, *лежащей на кривой* $\zeta\xi$, *когда* y *лежитъ на кривой* 0η. *Пусть* r *есть положительное количество, выбранное такъ, чтобы оно было менѣе разстоянія точки* ζ *отъ ближайшей изъ особыхъ точекъ функцій* $\Theta(z)$ *и* $H(z)$. *Обозначимъ чрезъ* M *и* N *соотвѣтственно модули maximum maximorum функцій*

$$\frac{1}{r}\,\Theta(\zeta + re^{\omega i}) \ \text{и}\ H(\zeta + re^{\omega i})$$

при возрастаніи ω *отъ* 0 *до* 2π, *а чрезъ* v *наибольшій модуль количества* $y = \lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z)$ *для точекъ* z *кривой* $\zeta\xi$. *Пусть имѣютъ силу первое условіе, указанное въ § 3 (n° 4), и неравенства:*

$$|\,\psi(\xi)\,| \leqq K_2 \quad\text{и}\quad v.M^\nu < 1.$$

Если при указанныхъ условіяхъ и обозначеніяхъ функція $f(z)$ *представляется такъ:*

$$f(z) = (z - \zeta)^{\beta - 1} \cdot \varphi(z) \qquad (91')$$

и если дѣйствительная часть количества β *положительная, то приближенная величина интеграла* $[\zeta\xi]$ *опредѣляется при помощи равенства:*

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta) \left\{ H(\zeta) \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta}{\nu}}} + \frac{1}{1} H'(\zeta)\,\Theta(\zeta) \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta+1}{\nu}}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{1.2} \frac{d\{H'(\zeta)\,\Theta^2(\zeta)\}}{d\zeta} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta+2}{\nu}}} + \ldots + \qquad (92)$$

$$\left. + \frac{1}{1.2\ldots(s-1)} \cdot \frac{d^{s-2}\{H'(\zeta)\,\Theta^{s-1}(\zeta)\}}{d\zeta^{s-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+s-1}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta+s-1}{\nu}}} + \Delta_s \right\},$$

гдѣ Δ_s *есть погрѣшность, предѣлы которой опредѣляются при помощи формулы:*

$$\Delta_s = \frac{\lambda\eta^{\frac{\beta+s}{\nu}} \cdot \frac{r}{s} \cdot N \cdot M^s}{1 - |\eta^{\frac{1}{\nu}}|\,M} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{(mx_0)^{\frac{\beta'+s}{\nu}}} +$$

$$+ H(\zeta)\,\delta_0 + \frac{1}{1} H'(\zeta)\,\Theta(\zeta)\,\delta_1 + \frac{1}{1.2} \frac{d\{H'(\zeta)\,\Theta^2(\zeta)\}}{d\zeta} \delta_2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots(s-1)} \cdot \frac{d^{s-2}\{H'(\zeta)\,\Theta^{s-1}(\zeta)\}}{d\zeta^{s-2}} \delta_{s-1}, \; |\lambda| < 1, \qquad (93)$$

при чемъ β' и x_0 суть дѣйствительныя части количествъ β и η,

$$\delta_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k \cdot \eta^{\frac{\beta+k}{\nu}} e^{-m\eta}}{m x_0}, & \text{если } \beta' + k \leqq \nu, \text{ и} \\ \dfrac{\lambda_k \cdot \eta^{\frac{\beta+k}{\nu}} e^{-m\eta}}{m x_0 + 1 - \dfrac{\beta'+k}{\nu}}, & \text{если } \beta' + k \geqq \nu, \end{cases}$$

$$|\lambda_k| < 1.$$

Само собою разумѣется, что указанныя здѣсь выраженія для полученія предѣловъ количествъ δ_k и Δ_s можно видоизмѣнять при обстоятельствахъ, указанныхъ въ теоремахъ II, III и V.

Теорема VII даетъ прочную опору вышеизложенному основному процессу приближеннаго вычисленія интеграла [$\zeta\xi$], ибо она содержитъ общія условія въ строгой и простой формѣ, достаточныя для примѣненія этого процесса къ *главнымъ* частямъ основного пути ABC (см. n^0 4). Теорема VII даетъ средства въ наглядной формѣ обнаружить возможность разложенія, опредѣляемаго равенствами (19) и (20), съ выполненіемъ всѣхъ условій теоремъ I и IV. Препятствія къ выполненію этихъ условій могутъ представиться лишь при обстоятельствахъ, кои характеризуютъ указанный выше (см. n^0 12) особый случай *втораго* рода. Въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіи теоремы VII имѣетъ важное значеніе вопросъ о выполненіи перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4). Разсматривая это условіе въ связи съ прочими условіями теоремы VII, замѣчаемъ, что на основаніи этой теоремы путь $O\eta$ лежитъ внутри вышеуказаннаго круга (O). Это налагаетъ ограниченіе на величину K_2, ибо количество

$$g = \lg \frac{K_1}{K_2},$$

будучи абсциссой x одной изъ точекъ кривой 0η, должно быть *менѣе* радіуса $r_0 = M^{-\nu}$ упомянутаго круга. Если этотъ кругъ

малъ, то можно, располагая величиною r, стараться по возможности расширить кругъ (O). Въ такомъ случаѣ въ этомъ кругѣ найдется болѣе простора, чтобы удовлетворить первому главному условію, указанному въ § 3 (n^0 4). Измѣняя r, можемъ просторъ этотъ, т. е. радіусъ r_0 круга (O) увеличивать до извѣстныхъ предѣловъ, слѣдуя указаніямъ, сдѣланнымъ въ главѣ II моей диссертаціи «*Рядъ Лагранжа*».

Правда, при извѣстныхъ условіяхъ, указанныхъ въ главѣ II моей статьи «Рядъ Лагранжа», теорема Коши-Руше при самомъ благопріятномъ выборѣ r иногда распространяется на область, *меньшую* круга сходимости ряда Лагранжа. Но на практикѣ и этой области большею частію бываетъ достаточно, чтобы помѣстить въ ней кривую 0η, удовлетворяющую первому главному условію, указанному въ § 3 (n^0 4). Если же нужно расширить эту область до *полнаго* круга сходимости Лагранжева ряда, примѣненнаго къ функціи $H(z)$, то для этого вмѣсто теоремы Коши-Руше нужно воспользоваться видоизмѣненіями ея, указанными въ главѣ III моей статьи «Рядъ Лагранжа».

Если и область полнаго круга сходимости вышеупомянутаго ряда Лагранжа оказалась бы слишкомъ тѣсною для помѣщенія въ ней кривой 0η, удовлетворяющей первому главному условію, указанному въ § 3 (n^0 4), то мы имѣли бы особый случай *второго* рода [вслѣдствіе близости точки $y=0$ къ особой точкѣ функціи $\Pi(y)$]. При этомъ вышеизложенный основной процессъ приближеннаго вычисленія становится вообще непримѣнимымъ, ибо если и можно, выходя изъ круга сходимости ряда Лагранжа, увеличить величину K_2, то это было бы безполезно вслѣдствіе негодности въ этомъ особомъ случаѣ выраженій члена ρ_s, входящаго въ составъ погрѣшности Δ_s, и, поэтому, вслѣдствіе необходимости отдѣльнаго изслѣдованія такихъ случаевъ.

Итакъ, для осуществленія вычисленій по плану, указанному въ теоремахъ I и IV, *теорія ряда Лагранжа даетъ средства, годныя во всей области примѣнимости этихъ теоремъ.*

При практическомъ примѣненіи теоремы VII, основанной на теоремѣ Коши-Руше, обнаруживается ея драгоцѣнное свойство въ томъ, что даже въ случаяхъ весьма сложныхъ она даетъ

возможность на самомъ дѣлѣ осуществить вычисленіе предѣловъ погрѣшности Δ_s.

Примѣненіе теоремы VII ограничено еще въ томъ отношеніи, что функція $f(z)$ должна имѣть форму (82). Предположимъ теперь, что функція $f(z)$ въ области точки $z=\zeta$ имѣетъ слѣдующую болѣе общую форму:

$$f(z) = (z-\zeta)^{\beta_1 - 1} \varphi_1(z) + (z-\zeta)^{\beta_2 - 1} \varphi_2(z) + \ldots, \quad (94)$$

гдѣ $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$,... суть функціи голоморфныя въ области точки $z=\zeta$ и не обращающіяся въ нуль при $z=\zeta$. Очевидно, интегралъ $[\zeta\xi]$ распадается на сумму интеграловъ, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ членамъ второй части равенства (94), при чемъ къ каждому изъ этихъ интеграловъ можетъ быть отдѣльно примѣнена теорема VII, которая и опредѣлитъ ихъ приближенныя выраженія.

n° 14. Рядъ Лагранжа есть въ сущности рядъ Маклорена, примѣненный къ неявной функціи, опредѣляемой при помощи уравненія особаго вида. Поэтому рядъ Лагранжа, давая то, что̀ получается посредствомъ ряда Маклорена, т. е. разложеніе функціи въ рядъ, къ этому присоединяетъ еще разрѣшеніе нѣкоторыхъ важныхъ *алгебраическихъ* трудностей. Но само собою разумѣется, что вмѣсто ряда Лагранжа можно пользоваться рядомъ Маклорена, что̀ иногда представляетъ удобства, если вышеупомянутыя алгебраическія трудности по какой либо причинѣ, напримѣръ, вслѣдствіе благопріятныхъ особенностей состава функціи $\psi(z)$ и уравненія (17), легко побѣждаются безъ ряда Лагранжа.

Здѣсь мы разсмотримъ примѣненіе ряда Маклорена къ приближенному вычисленію интеграла $[\zeta\xi]$. При этомъ примѣненіи заслуживаетъ особаго вниманія извѣстная интегральная форма дополнительнаго члена ряда Маклорена, дающая возможность получать соотвѣтствующія выраженія количества B_s, опредѣляемаго равенствами (19) и (20) и входящаго въ равенство (24). Отсюда выводятся затѣмъ примѣчательныя выраженія предѣ-

ловъ члена ρ_s, входящаго въ составъ погрѣшности Δ_s, представляемой равенствомъ (28').

Предположимъ, что главная точка ζ не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$. Далѣе, пусть функція $f(z)$ имѣетъ форму (82), при чемъ, какъ видно изъ разложенія (87), функція

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy}$$

представляется въ области точки $y=0$ такъ:

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy} = t^{\beta-\nu}\varphi(t), \qquad t = y^{\frac{1}{\nu}}, \tag{95}$$

гдѣ $\varphi(t)$ есть функція голоморфная въ области точки $t=0$ и не обращающаяся въ нуль при $t=0$. Рядъ Маклорена, примѣненный къ этой функціи $\varphi(t)$, даетъ слѣдующее равенство:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}t + \ldots + \frac{\varphi^{(s-1)}(0)}{1.2\ldots(s-1)}t^{s-1} + t^s B_s, \tag{96}$$

$$t = y^{\frac{1}{\nu}},$$

гдѣ B_s есть функція, сохраняющая конечное значеніе при $t=0$.

Допустимъ для простоты, что выполняются условія примѣненія формулы (78), т. е. пусть между кривою 0η и хордою $\overline{0\eta}$, стягивающею ея точки 0 и η, нѣтъ особыхъ точекъ y функціи $\varphi(y^{\frac{1}{\nu}})$. Замѣтимъ, что допущеніе это не ограничиваетъ общности рѣшенія нашей задачи, такъ какъ оно можетъ быть осуществлено двояко: 1) такимъ выборомъ основного пути ABC и его части $\zeta\xi$, чтобы кривая 0η не выходила изъ предѣловъ круга сходимости разложенія функціи $\varphi(y^{\frac{1}{\nu}})$ по восходящимъ степенямъ $y^{\frac{1}{\nu}}$, и 2) выборомъ указаннаго въ § 8 *ортогональнаго* основ-

ного пути, при чемъ перемѣнное y дѣлается дѣйствительнымъ и положительнымъ, т. е. путь 0η обращается въ *прямолинейный* отрѣзокъ, совпадающій съ положительною осью плоскости комплекснаго перемѣннаго y.

При сдѣланномъ допущеніи перемѣнное y, отъ котораго зависитъ функція B_s, входящая въ равенство (78), представляется такъ: $y=\eta u$, гдѣ $0 \leqq u \leqq 1$, а величина t представляется такъ: $t=\tau u^{\frac{1}{\nu}}$, гдѣ $\tau=\eta^{\frac{1}{\nu}}$, при чемъ изображеніе t описываетъ прямолинейный отрѣзокъ 0τ, когда u возрастаетъ отъ 0 до 1. Вмѣстѣ съ тѣмъ количества xt и θt, кои фигурируютъ въ послѣдующихъ формулахъ, при условіяхъ:

$$0 \leqq x \leqq 1 \text{ и } 0 < \theta < 1,$$

также будутъ изображаться точками отрѣзка 0τ.

Замѣтивъ это, возьмемъ слѣдующее извѣстное интегральное выраженіе количества B_s, опредѣляемаго равенствомъ (96):

$$\left.\begin{aligned} B_s &= \frac{1}{1.2\ldots(s-1)}\int_0^1 (1-x)^{s-1}\,\varphi^{(s)}(xt)\,dx, \\ t &= \eta^{\frac{1}{\nu}}\,u^{\frac{1}{\nu}} = \tau\,u^{\frac{1}{\nu}}. \end{aligned}\right\} \quad (97)$$

Отсюда при помощи соотвѣтствующей изъ формулъ (2) и (4) находимъ:

$$B_s = \frac{\lambda\,\varphi^{(s)}(\theta t)}{1.2.3\ldots s},\ 0<\theta<1, \quad (98)$$

гдѣ $\lambda=1$, если количество $\varphi^{(s)}(\theta t)$ дѣйствительное, и $|\lambda|<1$, если $\varphi^{(s)}(\theta t)$ мнимое. Внося найденное выраженіе B_s въ формулу (78), получаемъ:

$$\rho_s = \frac{\eta^{\alpha_s+1}}{1.2\ldots s}\int_0^1 e^{-m\eta u}\,u^{\alpha_s}\,\lambda\varphi^{(s)}(\theta t)\,du, \quad (99)$$

при чемъ, какъ видно изъ равенствъ (95) и (96),

$$\alpha_s = \frac{\beta + s - \nu}{\nu}. \qquad (99')$$

Если величины α_s, η и $\varphi^{(s)}(\theta t)$, входящія въ равенство (99), дѣйствительныя и если μ_1 и μ_2 суть наименьшее и наибольшее значенія функціи $\varphi^{(s)}(t)$ при возрастаніи u отъ 0 до 1, то изъ равенства (99) слѣдуетъ, что величина ρ_s заключается въ предѣлахъ:

$$\frac{\mu_1 Q(\alpha_s)}{1.2\ldots s.m^{1+\alpha_s}} < \rho_s < \frac{\mu_2 Q(\alpha_s)}{1.2\ldots s.m^{1+\alpha_s}}, \qquad (100)$$

гдѣ

$$Q(\alpha_s) = \int_0^{m\eta} e^{-v} v^{\alpha_s} dv. \qquad (100')$$

Если величины α_s и η дѣйствительныя, а величина $\varphi^{(s)}(\theta t)$ мнимая, то при посредствѣ равенства (99) убѣждаемся, что

$$\rho_s = \frac{\lambda \mu Q(\alpha_s)}{1.2\ldots s.m^{1+\alpha_s}}, \quad |\lambda| < 1, \qquad (101)$$

гдѣ $Q(\alpha_s)$ имѣетъ вышеуказанное значеніе и μ есть наибольшее значеніе модуля функціи $\varphi^{(s)}(t)$ при возрастаніи u отъ 0 до 1.

Если, наконецъ, величины α_s, η и $\varphi^{(s)}(\theta t)$ комплексныя, то изъ равенства (99) слѣдуетъ, что

$$\rho_s = \frac{\lambda \eta^{\alpha_s+1} \mu\, Q(\alpha'_s)}{1.2\ldots s\,(mx_0)^{1+\alpha'_s}}, \quad |\lambda| < 1, \qquad (102)$$

гдѣ x_0 и α'_s суть дѣйствительныя части количествъ η и α_s, μ есть наибольшее значеніе модуля функціи $\varphi^{(s)}(t)$ при возрастаніи u отъ 0 до 1 и

$$Q(\alpha'_s) = \int_0^{mx_0} e^{-v} v^{\alpha'_s} dv. \qquad (102')$$

Примѣняя къ разложенію функціи $\Pi(y)$, опредѣляемому равенствами (95) и (96), предшествующія теоремы и формулы, находимъ слѣдующее приближенное выраженіе интеграла $[\zeta\xi]$, отнесеннаго къ части $\zeta\xi$ основнаго пути ABC, удовлетворяющей условіямъ теоремы IV:

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\varphi(0)\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta}{\nu}}} + \frac{\varphi'(0)}{1}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta+1}{\nu}}} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{\varphi^{(s-1)}(0)}{1.2\ldots(s-1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+s-1}{\nu}\right)}{m^{\frac{\beta+s-1}{\nu}}} + \Delta_s\right\}, \qquad (102'')$$

гдѣ Δ_s есть погрѣшность, предѣлы которой опредѣляются при помощи формулы:

$$\Delta_s = \rho_s + \varphi(0)\,\delta_0 + \frac{\varphi'(0)}{1}\,\delta_1 + \ldots + \frac{\varphi^{(s-1)}(0)}{1.2\ldots(s-1)}\,\delta_{s-1}, \qquad (102''')$$

при чемъ предѣлы количествъ ρ_s и δ_k опредѣляются помощію формулъ (101) или (102) и выраженій δ_k, указанныхъ въ теоремѣ VII, а если количества ρ_s и δ_k дѣйствительныя, то предѣлы ихъ опредѣляются помощію неравенствъ (100), (46) и (46′).

Изложенный здѣсь выводъ формулы, опредѣляющей приближенное выраженіе интеграла $[\zeta\xi]$, особенно удобенъ для подтвержденія замѣчаній, сдѣланныхъ по поводу связи доказательства теоремы I съ вопросомъ о сходимости безконенаго разложенія, опредѣляемаго равенствами (19) и (20) при $s=\infty$. Теперь разложенію этому дана форма (96), въ которой B_s опредѣляется выраженіями (97) и (98), годность которыхъ не обусловлена сходимостью ряда (96) при $s=\infty$. Слѣдовательно и выводъ приближеннаго выраженія (102″) интеграла $[\zeta\xi]$ не связанъ непремѣнно съ выполненіемъ для всѣхъ точекъ t отрѣзка 0τ условій сходимости безконечнаго ряда Маклорена, въ

который разлагается функція $\varphi(t)$, и сохраняетъ силу даже тогда, когда отрѣзокъ 0τ отчасти выходитъ изъ круга сходимости этого ряда, такъ что рядъ этотъ для точекъ t, лежащихъ на отрѣзкѣ 0τ внѣ упомянутаго круга, дѣлается *расходящимся*. Для правильности формулы (102″) необходимо лишь условіе, чтобы функціи $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t), \ldots$, $\varphi^{(s)}(t)$ были конечными и непрерывными для всѣхъ точекъ t вышеуказаннаго прямолинейнаго отрѣзка 0τ.

Расходимость безконечнаго ряда Маклорена, въ который разлагается функція $\varphi(t)$, не имѣетъ при этомъ значенія по той причинѣ, что въ разсматриваемомъ выводѣ мы пользуемся не безконечнымъ рядомъ Маклорена, а конечнымъ многочленомъ (96), въ которомъ послѣдній членъ, независимо отъ сходимости или расходимости безконечнаго ряда, выражается при посредствѣ интеграла (97). Само собою разумѣется, что при этомъ формула (92) должна часто представлять сходство съ формулой Стирлинга въ томъ отношеніи, что вторая часть равенства (92) или (102″), разсмотрѣнная безъ члена Δ_s при $s = \infty$, будетъ расходящимся безконечнымъ рядомъ, негоднымъ для вычисленія интеграла [ζξ].

Этотъ безконечный рядъ, однако, непремѣнно будетъ сходящимся, если функція $\varphi(t)$ останется конечною и непрерывною для всѣхъ возможныхъ конечныхъ значеній t, представляя собою такъ называемую цѣлую (алгебраическую или трансцедентную) функцію перемѣннаго t.

Примѣръ употребленія формулъ вида (96) и (99), несмотря на расходимость соотвѣтствующаго безконечнаго ряда Маклорена, представляется при выводѣ формулы Стирлинга. Въ самомъ дѣлѣ, выводъ формулы Стирлинга, дающей приближенное выраженіе логариѳма $\Gamma(m)$, опирается на приближенное вычисленіе интеграла

$$\frac{d^2 \lg \Gamma(m)}{dm^2} = \int_0^\infty \frac{z}{1-e^{-z}} e^{-mz} dz, \qquad (103)$$

принадлежащаго къ виду (1). Въ данномъ случаѣ $\psi(z) = e^{-z}$ и преобразованіе (17) даетъ $y = z$. Функція

$$\Pi(y) = \varphi(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

разлагается въ рядъ Маклорена по степенямъ z, но этотъ рядъ будетъ сходящимся не для всѣхъ значеній z въ предѣлахъ интегрированія. Однако, какъ извѣстно, представивъ указанную функцію $\varphi(z)$ первыми членами ряда Маклорена съ дополнительнымъ членомъ и выполняя почленно требуемыя интеграціи, получимъ искомую приближенную величину функціи

$$\frac{d^2 \lg \Gamma(m)}{dm^2}.$$

n^0 15. Вышеизложенный основной процессъ вычисленія интеграла $[\zeta\xi]$ содержитъ въ себѣ предположеніе, что функція $f(z)$ для главной точки ζ звена $\zeta\xi$ сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка менѣе 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$. Вообразимъ теперь, что это предположеніе не имѣетъ силы, такъ что функція $f(z)$ для главной точки ζ основного пути ABC обращается въ безконечность порядка не ниже 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$, но предположимъ, что порядокъ этотъ представляется конечнымъ числомъ. При этомъ интегралъ $[\zeta\xi]$ дѣлается невозможнымъ.

При разсматриваемыхъ условіяхъ ζ есть особая точка функціи $f(z)\psi^m(z)$, и въ этой точкѣ должна быть укрѣплена игла. Обращаясь къ звеньямъ второго рода, образованіе которыхъ выяснено въ n^0 8, напомнимъ, что звено $\xi'\xi''$ второго рода, соотвѣтствующее разсматриваемой главной точкѣ ζ, должно имѣть въ своемъ составѣ петлю $z'z''$ и, поэтому, полнѣе обозначено чрезъ $\xi'z'z''\xi''$. При этомъ точки ξ' и ξ'' будутъ удовлетворять неравенствамъ:

$$|\psi(\xi')| \leqq K_2, \quad |\psi(\xi'')| \leqq K_2. \qquad (104)$$

Существуютъ разные пріемы приближеннаго вычисленія интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ. Здѣсь мы укажемъ пріемъ, въ которомъ полученіе приближенной величины интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ приводится къ изложенному выше (въ *nn*° 9 и 10) основному процессу вычисленія, соотвѣтствующему звеньямъ $\zeta\xi''$ и $\zeta\xi'$ перваго рода.

Если функція $f_1(z)$, конечная и непрерывная для точекъ z кривой $\xi'z'z''\xi''$, сохраняетъ при $z=\zeta$ также конечное значеніе или обращается въ безконечность, но порядокъ α' этой безконечности менѣе 1, то будемъ имѣть:

$$\int\limits_{(\xi'z'z''\xi'')} f_1(z)\,\psi^m(z)\,dz = \int\limits_{(\zeta\xi'')} f_1(z)\,\psi^m(z)\,dz - \int\limits_{(\zeta\xi')} f_1(z)\,\psi^m(z)\,dz, \quad (105)$$

гдѣ $\zeta\xi'$ и $\zeta\xi''$ суть звенья перваго рода. Очевидно, интегралы, стоящіе во второй части равенства (105), принадлежатъ къ виду (16) и, поэтому, вычисляются на основаніи предшествующихъ формулъ и теоремъ.

Замѣтивъ это, предположимъ, что функція $f(z)$ можетъ быть представлена такъ:

$$f(z) = F(z) + \varphi(z),$$

гдѣ $F(z)$ есть функція, которая при $z=\zeta$ сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка *ниже* 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$, и $\varphi(z)$ есть функція, способная въ области точки $z=\zeta$ разлагаться по степенямъ $z-\zeta$. При этихъ условіяхъ интегралъ $[\xi'z'z''\xi'']$ распадается на два:

$$\int\limits_{(\xi'z'z''\xi'')} F(z)\,\psi^m(z)\,dz \text{ и } \int\limits_{(\xi'z'z''\xi'')} \varphi(z)\,\psi^m(z)\,dz,$$

изъ которыхъ первый допускаетъ примѣненіе формулы (105), полагая $f_1(z)=F(z)$, а второй послѣ разложенія функціи $\varphi(z)$ по степенямъ $z-\zeta$ распадается на интегралы вида:

$$J = \int\limits_{(\xi'z'z''\xi'')} (z-\zeta)^\beta\,\psi^m(z)\,dz. \quad (106)$$

Теперь, слѣдовательно, остается разсмотрѣть только интегралы вида (106).

Обозначимъ чрезъ β' дѣйствительную часть количества β. При $\beta' > -1$ къ интегралу J, очевидно, примѣнима формула (105), полагая $f_1(z) = (z-\zeta)^\beta$. Но въ числѣ интеграловъ вида (106) въ разсматриваемомъ случаѣ должны находиться такіе, для которыхъ $\beta' \leqq -1$. При этомъ условіи къ интегралу J вида (106) примѣняется предварительно интеграція по частямъ въ слѣдующемъ порядкѣ.

Пусть

$$\beta' = -n + \alpha',$$

гдѣ n цѣлое *положительное* число и $-1 < \alpha' \leqq 0$. Затѣмъ въ извѣстной формулѣ:

$$\int u \frac{d^n v}{dz^n} dz = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1} u}{dz^{k-1}} \frac{d^{n-k} v}{dz^{n-k}} + (-1)^n \int v \frac{d^n u}{dz^n} dz \quad (107)$$

положимъ:

$$u = \psi^m(z) \text{ и } v = \frac{(z-\zeta)^\alpha}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)},$$

гдѣ $\alpha = \beta + n$, и отнесемъ указанныя въ формулѣ (107) интеграціи къ пути $\xi' z' z'' \xi''$. Получимъ:

$$J = \Delta + \int\limits_{(\xi' z' z'' \xi'')} \frac{(-1)^n (z-\zeta)^\alpha}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)} \frac{d^n \psi^m(z)}{dz^n} dz, \quad (108)$$

гдѣ $\Delta = \Phi(\xi') - \Phi(\xi'')$, при чемъ

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d^{k-1} \psi^m(\xi)}{d\xi^{k-1}} \frac{\Gamma(-\beta-k)(\xi-\zeta)^{\beta+k}}{\Gamma(-\beta)}.$$

Отсюда и изъ неравенствъ (104) легко усмотрѣть, что при выполненіи перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4), выраженіе

$$\frac{\Delta}{\psi^m(\zeta)}$$

есть малая величина порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$, и, поэтому, оно должно быть присоединено къ *погрѣшности* искомаго приближеннаго выраженія интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$. Наконецъ, интегралъ, представляемый послѣднимъ членомъ второй части равенства (108), приводится къ виду:

$$\int\limits_{(\xi' z' z'' \xi'')} f_1(z)\, \psi^m(z)\, dz,$$

гдѣ

$$f_1(z) = \frac{(-1)^n (z-\zeta)^\alpha}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)} \frac{1}{\psi^m(z)} \frac{d^n \psi^m(z)}{dz^n},$$

при чемъ къ этому интегралу примѣнима формула (105), такъ какъ функція $f_1(z)$ при $z = \zeta$ обращается въ безконечность порядка $-\alpha' < 1$ относительно $\frac{1}{z-\zeta}$.

Указанный пріемъ убѣждаетъ въ теоретической возможности приводить приближенное вычисленіе интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ къ вычисленію интеграловъ вида (16). Ниже (въ § 9) мы укажемъ другіе болѣе непосредственные пріемы вычисленія интеграловъ вида $[\xi' z' z'' \xi'']$.

§ 5. **Видоизмѣненія основного процесса вычисленія при выполненіи обоихъ главныхъ условій, указанныхъ въ § 3.**

n°. 16. Основной процессъ вычисленія, выясненный выше (въ § 4), можно видоизмѣнять, при чемъ и форма приближеннаго выраженія интеграла $[\zeta\xi]$ видоизмѣняется. Тогда какъ изложенный выше процессъ вычисленія даетъ разложеніе выраженія

$$\frac{[\zeta\xi]}{\psi^m(\zeta)}$$

по восходящимъ степенямъ количества $\frac{1}{m}$, другіе процессы приводятъ къ разложенію того же выраженія по другимъ убывающимъ функціямъ m.

Видоизмѣненные процессы вычисленія приближенныхъ выраженій интеграла $[\zeta\xi]$ отличаются отъ процесса, который изложенъ въ предшествующемъ параграфѣ, уравненіемъ, служащимъ для замѣны перемѣннаго z новымъ перемѣннымъ y. Вмѣсто уравненія (17) берется вообще уравненіе вида:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\,\psi_1(y), \tag{109}$$

гдѣ $\psi_1(y)$ есть функція, голоморфная въ области точки $y=0$ и удовлетворяющая условію: $\psi_1(0) = 1$.

Функція $\psi_1(y)$ въ уравненіи (109) можетъ имѣть различныя формы. Но здѣсь мы ограничимся краткимъ разсмотрѣніемъ лишь двухъ болѣе простыхъ случаевъ: 1) когда уравненіе (109) имѣетъ видъ:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\,(1-y) \tag{110}$$

и 2) когда уравненіе (109) представляется такъ:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\,\frac{1}{1+y}. \tag{111}$$

Въ § 9 мы разсмотримъ еще случаи, когда $\psi_1(y)$ представляется функціями: e^{-y^ν}, $1-y^\nu$, $\frac{1}{1+y^\nu}$, гдѣ ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія: $\psi(z)=\psi(\zeta)$.

n° 17. Пусть перемѣнное z преобразуется посредствомъ уравненія (110). При этомъ будемъ предполагать, что перемѣнное y дѣйствительное и положительное, каковое предположеніе, какъ мы увидимъ ниже (въ § 8), не ограничиваетъ задачи, такъ какъ выборомъ *ортогональнаго* основного пути (см. *n*° 24) бываетъ можно достигнуть того, чтобы для кривой $\zeta\xi$, составляющей часть звена $\zeta\xi'$ этого пути, перемѣнное y было дѣйствительнымъ и положительнымъ. Ниже мы будемъ разсматривать интегралъ $[\zeta\xi]$, отнесенный къ упомянутой части $\zeta\xi$ кривой $\zeta\xi'$, предполагая, что точка ξ выбрана такъ, какъ было указано въ *n*° 10 (пункт. I).

Пусть функція $f(z)\,dz$ представляется такъ:

$$f(z)\,dz = dy\,\{A_0\,y^{\alpha_0} + A_1\,y^{\alpha_1} + \ldots\ldots + A_{s-1}\,y^{\alpha_{s-1}} + R_s\},\qquad (112)$$

гдѣ дополнительный членъ R_s пусть имѣетъ видъ:

$$R_s = y^{\alpha_s}\,B_s,\qquad (113)$$

при чемъ B_s сохраняетъ конечное значеніе на протяженіи кривой $\zeta\,\xi$. Дѣйствительныя части α'_0, $\alpha'_1,\ldots$, α'_s показателей α_0, $\alpha_1,\ldots$, α_s пусть удовлетворяютъ условіямъ:

$$-1 < \alpha'_0 \leqq \alpha'_1 \leqq \ldots \leqq \alpha'_{s-1} \leqq \alpha'_s.\qquad (113')$$

При этомъ интегралъ $[\zeta\xi]$, преобразованный при посредствѣ уравненія (110), представится такъ:

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \int_0^{\tau_1} (1-y)^m\,y^{\alpha_k}\,dy + \rho_s\right\},\qquad (114)$$

гдѣ

$$\rho_s = \int_0^{\tau_1} (1-y)^m\,y^{\alpha_s}\,B_s\,dy,\qquad (114')$$

при чемъ количество τ_1 менѣе 1 и опредѣляется изъ уравненія:

$$\psi(\xi) = \psi(\zeta)\,(1-\tau_1).\qquad (115)$$

Очевидно, τ_1 связано съ величиною τ, которая опредѣляется уравненіемъ (25), такъ:

$$1-\tau_1 = e^{-\eta} \leqq \frac{K_2}{K_1}.\qquad (115')$$

Равенство (114) приводитъ задачу къ приближенному вычисленію интеграловъ вида:

$$J_k = \int_0^{\tau_1} (1-y)^m\,y^{\alpha_k}\,dy.$$

Имѣемъ:

$$J_k = \int_0^{\eta_1} (1-y)^m y^{\alpha_k} dy = \int_0^1 (1-y)^m y^{\alpha_k} dy - \int_{\eta_1}^1 (1-y)^m y^{\alpha_k} dy$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1+m)}{\Gamma(2+\alpha_k+m)} + \delta_k, \tag{116}$$

гдѣ

$$\delta_k = -\int_{\eta_1}^1 (1-y)^m y^{\alpha_k} dy. \tag{116'}$$

Въ равенствѣ (116) выраженіе

$$\frac{\Gamma 1+\alpha_k)\,\Gamma(1+m)}{\Gamma(2+\alpha_k+m)}$$

есть приближенная величина интеграла J_k, а δ_k есть погрѣшность этого выраженія. Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (114) получаетъ видъ:

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta) \left\{ \sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1+m)}{\Gamma(2+\alpha_k+m)} + \Delta_s \right\}, \tag{117}$$

гдѣ Δ_s есть погрѣшность, которая представляется такъ:

$$\Delta_s = \rho_s + \sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \delta_k. \tag{117'}$$

Составляя формулы для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_s, сначала предположимъ, что всѣ показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ дѣйствительные. При посредствѣ формулы (2), примѣненной къ интегралу (116′), убѣждаемся, что

$$\delta_k = -[\eta_1 + (1-\eta_1)\,\theta_k]^{\alpha_k} \int_{\eta_1}^1 (1-y)^m dy$$

$$= -[\eta_1 + (1-\eta_1)\,\theta_k]^{\alpha_k} \frac{(1-\eta_1)^{m+1}}{m+1}, \quad 0 < \theta_k < 1. \tag{118}$$

Затѣмъ при помощи соотвѣтствующей изъ формулъ (2) и (4), примѣненной къ интегралу (114′), находимъ:

$$\rho_s = \lambda\, \overline{B}_s \int\limits_0^{\eta_1} (1-y)^m\, y^{\alpha_s}\, dy$$
$$= \lambda\, \theta\, \overline{B}_s\, \frac{\Gamma(1+\alpha_s)\,\Gamma(1+m)}{\Gamma(2+\alpha_s+m)}\,, \quad 0 < \theta < 1, \qquad (118')$$

гдѣ $\overline{B_s}$ есть значеніе функціи B_s, соотвѣтствующее нѣкоторому значенію перемѣннаго y, заключенному между предѣлами 0 и η_1; далѣе $\lambda=1$, если функція B_s дѣйствительная, и $|\lambda| < 1$, если функція B_s представляетъ мнимое количество.

Наконецъ, при помощи формулы (118) приводимъ равенство (117′) къ слѣдующему виду:

$$\Delta_s = \rho_s - \frac{(1-\eta_1)^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{k=s-1} A_k\, [\eta_1 + (1-\eta_1)\,\theta_k]^{\alpha_k}\,, \qquad (119)$$

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta_k < 1,$$

при чемъ предѣлы члена ρ_s получаются помощію формулы (118′) а при нахожденіи предѣловъ количествъ $\{\eta_1 + (1-\eta_1)\,\theta_k\}^{\alpha_k}$ должно имѣть въ виду, что при $\alpha_k < 0$ имѣютъ силу неравенства:

$$1 \leqq \{\eta_1 + (1-\eta_1)\,\theta_k\}^{\alpha_k} \leqq \eta_1^{\alpha_k}\,, \qquad (119')$$

а при $\alpha_k > 0$ имѣютъ силу неравенства:

$$\eta_1^{\alpha_k} \leqq \{\eta_1 + (1-\eta_1)\,\theta_k\}^{\alpha_k} \leqq 1. \qquad (119'')$$

Если коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}$ и функція B_s суть величины дѣйствительныя, то, исходя изъ найденныхъ формулъ, можемъ для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_s получить неравенства, подобныя неравенствамъ (49′).

Предположимъ теперь, что нѣкоторые изъ показателей α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ мнимые. Въ этомъ случаѣ изъ равенствъ (116′) и (114′) слѣдуетъ, что

$$\delta_k = \lambda_k \int_{\eta_1}^{1} (1-y)^m \, y^{\alpha'_k} \, dy, \tag{120}$$

$$|\lambda_k| < 1, \quad 0 < \theta_k < 1,$$

$$\rho_s = \lambda \, \mu \int_0^{\eta_1} (1-y)^m \, y^{\alpha'_s} \, dy = \lambda \theta \mu \, . \, \frac{\Gamma(1+\alpha_s)\, \Gamma(1+m)}{\Gamma(2+\alpha_s+m)}, \tag{120′}$$

$$|\lambda| < 1, \quad 0 < \theta < 1,$$

гдѣ μ есть наибольшее значеніе модуля функціи B_s при возрастаніи y отъ 0 до 1. Затѣмъ при посредствѣ формулы (2), примѣненной къ интегралу

$$\int_{\eta_1}^{1} (1-y)^m \, y^{\alpha'_k} \, dy,$$

убѣждаемся, что равенство (120) представляется такъ:

$$\delta_k = \lambda_k \, \{\eta_1 + (1-\eta_1)\, \theta_k\}^{\alpha'_k} \, \frac{(1-\eta_1)^{m+1}}{m+1}, \tag{120″}$$

$$0 < \theta_k < 1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (117′) получаетъ видъ:

$$\Delta_s = \rho_s + \frac{(1-\eta_1)^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{k=s-1} \lambda_k A_k \, \{\eta_1 + (1-\eta_1)\theta_k\}^{\alpha'_k} \tag{121},$$

$$|\lambda_k| < 1, \quad 0 < \theta_k < 1 \ (k=0, 1, \ldots, s-1),$$

при чемъ предѣлы величины ρ_s получаются при помощи равенства (120′), а для опредѣленія предѣловъ количествъ вида:

$$\{\eta_1 + (1-\eta_1)\, \theta_k\}^{\alpha'_k}$$

служатъ неравенства, получаемыя изъ неравенствъ (119′) и (119″) замѣною α_k чрезъ α'_k.

Опредѣляя $\Gamma(1+m)$ и $\Gamma(2+\alpha_s+m)$ при помощи формулы Стирлинга, можемъ убѣдиться, что при выполненіи перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4), порядокъ погрѣшности Δ_s, входящей въ формулу (117), не ниже числа $1+\alpha'_s$ относительно $\frac{1}{m}$. По поводу членовъ приближеннаго выраженія величины

$$\frac{[\zeta\xi]}{\psi^m(\zeta)},$$

опредѣляемаго при помощи формулы (117), замѣтимъ, что члены эти расположены по функціямъ

$$\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(2+\alpha_k+m)},$$

представляющимъ малыя величины порядка $1+\alpha'_k$ относительно $\frac{1}{m}$.

Что̀ касается способовъ полученія разложеній вида (112), то опять важнымъ рессурсомъ въ этихъ способахъ является теорія ряда Лагранжа вмѣстѣ съ теоремою Коши-Руше, примѣняемая къ уравненію (110), которое должно быть представлено слѣдующей формѣ:

$$z-\zeta=y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(z), \tag{122}$$

гдѣ ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$ и

$$\Theta(z)=\left\{\frac{\psi(\zeta)\,(z-\zeta)^\nu}{\psi(\zeta)-\psi(z)}\right\}^{\frac{1}{\nu}}. \tag{122′}$$

Порядокъ этого примѣненія аналогиченъ съ тѣмъ, который указанъ въ n^0 13, и отличается отъ послѣдняго лишь формою функціи $\Theta(z)$.

Кромѣ ряда Лагранжа, для полученія разложеній вида (112) можетъ служить рядъ Маклорена съ дополнительнымъ членомъ, разсмотрѣніе котораго приводитъ къ выводамъ, аналогичнымъ съ тѣми, кои изложены въ n^0 14.

Слѣдуетъ еще сказать, что если вышеуказанное условіе, согласно которому дѣйствительныя части величинъ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ должны быть болѣе -1, не выполняется, то предварительно необходимо прибѣгнуть къ пріему, изложенному въ n^0 15, а при извѣстныхъ условіяхъ можно воспользоваться формулами, указанными въ § 9.

n^0 18. Пусть перемѣнное z преобразуется посредствомъ уравненія (111) и пусть при этомъ функція $f(z)\,dz$ представляется такъ:

$$f(z)\,dz = dy\,\{A_0 y^{\alpha_0} + A_1 y^{\alpha_1} + \ldots + A_{s-1} y^{\alpha_{s-1}} + R_s\}, \qquad (123)$$

гдѣ

$$R_s = y^{\alpha_s} B_s, \qquad (124)$$

при чемъ B_s пусть сохраняетъ конечное значеніе на протяженіи кривой $\zeta\xi$. Для простоты будемъ предполагать, что перемѣнное y для всѣхъ точекъ z кривой $\zeta\xi$ остается дѣйствительнымъ и положительнымъ. Выполненіе этого условія безъ ограниченія общности рѣшенія задачи достигается выборомъ *ортогональнаго* основного пути (см. n^0 24).

Предположимъ, что дѣйствительныя части $\alpha'_0, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_s$ количествъ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ удовлетворяютъ условіямъ:

$$-1 < \alpha'_0 \leqq \alpha'_1 \leqq \ldots \leqq \alpha'_{s-1} \leqq \alpha'_s. \qquad (124')$$

Интегралъ $[\zeta\xi]$ посредствомъ преобразованія (111) и разложенія, опредѣляемаго уравненіями (123) и (124), можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \int_0^{\eta_s} \frac{y^{\alpha_k}\,dy}{(1+y)^m} + \rho_s\right\}, \qquad (125)$$

гдѣ

$$\rho_s = \int_0^{\eta_2} \frac{y^{\alpha_s} B_s\, dy}{(1+y)^m}, \tag{125'}$$

при чемъ η_2 опредѣляется изъ уравненія

$$\psi(\xi) = \frac{\psi(\zeta)}{1+\eta_2}. \tag{126}$$

Очевидно, количество η_2 связано съ величинами η и η_1, опредѣляемыми равенствами (25) и (115), такъ:

$$1+\eta_2 = e^{\eta} = \frac{1}{1-\eta_1} \geqq \frac{K_1}{K_2}. \tag{127}$$

Равенство (125) приводитъ задачу къ приближенному вычисленію интеграловъ вида:

$$J_k = \int_0^{\eta_2} \frac{y^{\alpha_k}\, dy}{(1+y)^m}. \tag{127'}$$

Находимъ:

$$J_k = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha_k}\, dy}{(1+y)^m} - \int_{\eta_2}^{+\infty} \frac{y^{\alpha_k}\, dy}{(1+y)^m} =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(m-1-\alpha_k)}{\Gamma(m)} + \delta_k, \tag{128}$$

гдѣ

$$\delta_k = -\int_{\eta_2}^{+\infty} \frac{y^{\alpha_k}\, dy}{(1+y)^m}. \tag{128'}$$

Въ равенствѣ (128) выраженіе

$$\frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(m-1-\alpha_k)}{\Gamma(m)}$$

есть приближенная величина интеграла J_k, а δ_k есть погрѣшность этого выраженія. Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (125) получаетъ видъ:

$$[\zeta\xi] = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1} A_k \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(m-1-\alpha_k)}{\Gamma(m)} + \Delta_s\right\}, \quad (129)$$

гдѣ Δ_s есть погрѣшность, которая представляется такъ:

$$\Delta_s = \rho_s + \sum_{k=0}^{k=s-1} A_k\,\delta_k. \quad (129')$$

Составляя формулы для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_s, сначала предположимъ, что всѣ показатели $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ дѣйствительные. При посредствѣ формулы (2), примѣненной къ интегралу (128′), убѣждаемся, что

$$\begin{aligned}\delta_k &= -\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha_k}\int_{\eta_2}^{\infty}\frac{dy}{(1+y)^{m-\alpha_k}}\\ &= \left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha_k}\frac{-1}{(m-\alpha_k-1)\,(1+\eta_2)^{m-\alpha_k-1}},\quad y_k > \eta_2.\end{aligned} \quad (130)$$

Затѣмъ при помощи соотвѣтствующей изъ формулъ (2) и (4), примѣненной къ интегралу (125′), находимъ:

$$\rho_s = \lambda\overline{B}_s\int_0^{\eta_2}\frac{y^{\alpha_s}\,dy}{(1+y)^m} = \lambda\theta\,\overline{B}_s\frac{\Gamma(1+\alpha_s)\,\Gamma(m-1-\alpha_s)}{\Gamma(m)}, \quad (131)$$

$$0 < \theta < 1,$$

гдѣ $\overline{B}_s$ есть значеніе функціи B_s, соотвѣтствующее среднему значенію перемѣннаго y, заключенному между предѣлами 0 и η_2; далѣе, $\lambda=1$, если функція B_s дѣйствительная, и $|\lambda| < 1$,

если B_s есть функція мнимая. Равенство (129′) при помощи формулы (130) приводится къ виду:

$$\Delta_s = \rho_s - \frac{1}{(1+\eta_2)^m}\sum_{k=0}^{k=s-1} A_k\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha_k}\frac{(1+\eta_2)^{\alpha_k+1}}{m-\alpha_k-1}, \quad (132)$$

$$y_k > \eta_2,$$

при чемъ предѣлы члена ρ_s находятся помощію формулы (131), при нахожденіи же предѣловъ выраженія

$$\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha_k}$$

должно имѣть въ виду, что при $\alpha_k < 0$ имѣютъ силу неравенства:

$$1 < \left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha_k} < \left(\frac{\eta_2}{1+\eta_2}\right)^{\alpha_k}, \quad (132')$$

а при $\alpha_k > 0$ имѣютъ силу неравенства:

$$\left(\frac{\eta_2}{1+\eta_2}\right)^{\alpha_k} < \left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha_k} < 1. \quad (132'')$$

Если коеффиціенты $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}$ и функція B_s суть количества дѣйствительныя, то, исходя изъ найденныхъ формулъ, можемъ для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_s получить неравенства, подобныя неравенствамъ (49′).

Предположимъ теперь, что нѣкоторые изъ показателей α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ мнимые. Въ этомъ случаѣ изъ формулъ (128′) и (125′) слѣдуетъ, что

$$\delta_k = \lambda_k \int_{\eta_2}^{\infty} \frac{y^{\alpha'_k}\, dy}{(1+y)^m}, \quad |\lambda_k| < 1, \quad (133)$$

$$\rho_s = \lambda\mu \int_0^{\eta_2} \frac{y^{\alpha'_s}\,dy}{(1+y)^m} = \lambda\theta\mu \,.\, \frac{\Gamma(1+\alpha'_s)\,\Gamma(m-1-\alpha'_s)}{\Gamma(m)}\,, \quad (133')$$

$$|\lambda| < 1,\ 0 < \theta < 1,$$

гдѣ μ есть наибольшее значеніе модуля функціи B_s при возрастаніи y отъ 0 до η_2. Далѣе, при помощи формулы (2), примѣненной къ интегралу

$$\int_{\eta_2}^{\infty} \frac{y^{\alpha'_k}\,dy}{(1+y)^m}\,,$$

равенство (133) приводится къ виду:

$$\delta_k = \lambda_k \left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha'_k} \frac{1}{(m-\alpha'_k-1)\,(1+\eta_2)^{m-\alpha'_k-1}}\,,\ y_k > \eta_2. \quad (133'')$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (129′) получаетъ видъ:

$$\Delta_s = \rho_s + \frac{1}{(1+\eta_2)^m} \sum_{k=0}^{k=s-1} \lambda_k A_k \left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha'_k} \frac{(1+\eta_2)^{\alpha'_k+1}}{(m-\alpha'_k-1)}\,, \quad (134)$$

$$|\lambda_k| < 1, \quad y_k > \eta_2,$$

при чемъ предѣлы величины ρ_s опредѣляются при помощи формулы (133′), а для опредѣленія предѣловъ количествъ вида:

$$\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)^{\alpha'_k}$$

служатъ неравенства, получаемыя изъ неравенствъ (132′) и (132″) замѣною α_k чрезъ α'_k.

Опредѣляя $\Gamma(m)$ и $\Gamma(m-1-\alpha_s)$ при помощи формулы Стирлинга, изъ разсмотрѣнія формулъ (133′) и (134) можемъ убѣдиться, что при выполненіи перваго главнаго условія, указан-

наго въ § 3 (n^0 4), порядокъ погрѣшности Δ_s, входящей въ формулу (129), не ниже числа α'_s+1 относительно $\frac{1}{m}$. По поводу членовъ приближеннаго выраженія величины

$$\frac{[\zeta\xi]}{\psi^m(\zeta)},$$

опредѣляемаго равенствомъ (129), замѣтимъ, что члены эти расположены по функціямъ

$$\frac{\Gamma(m-\alpha_k-1)}{\Gamma(m)},$$

представляющимъ малыя величины порядка $1+\alpha'_k$ относительно $\frac{1}{m}$.

Что касается способовъ полученія разложеній вида (123), то эти разложенія съ дополнительнымъ членомъ получаются при помощи ряда Лагранжа, примѣненнаго къ уравненію (111), которое должно быть представлено въ слѣдующей формѣ:

$$z-\zeta=y^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta(z), \tag{135}$$

гдѣ ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$ и

$$\Theta(z)=\left\{\frac{\psi(z)\;(z-\zeta)^\nu}{\psi(\zeta)-\psi(z)}\right\}^{\frac{1}{\nu}}. \tag{135'}$$

Порядокъ такого примѣненія ряда Лагранжа и теоремы Коши-Руше вполнѣ аналогиченъ съ тѣмъ, который указанъ въ n^0 13, и отличается отъ послѣдняго только формой функціи $\Theta(z)$.

Кромѣ ряда Лагранжа, для полученія разложеній вида (123) можемъ воспользоваться теоріей ряда Маклорена съ дополнительнымъ членомъ, разсмотрѣніе котораго приводитъ къ выводамъ, аналогичнымъ съ тѣми, кои изложены въ n^0 14.

Если $f(z)$ при $z = \zeta$ обращается въ безконечность порядка не ниже 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$, такъ что условія (124′) не выполняются, то вышеприведенныя формулы теряютъ силу. При этихъ условіяхъ необходимо прибѣгнуть къ пріему, изложенному въ n^0 15, а при извѣстныхъ условіяхъ можно вмѣсто этого пріема воспользоваться формулами, указанными въ § 9.

§ 6. Объ основныхъ путяхъ, направленныхъ хорошо и нехорошо, и о критическомъ основномъ пути ABC. Особые случаи перваго рода. Случай, когда нѣкоторыя звенья основного пути интегрированія имѣютъ малую длину, и видоизмѣненіе основного процесса вычисленія для этого случая. Случай, когда неглавныя точки съ измѣненіемъ параметровъ дѣлаются главными. Подглавныя точки. Расширенное понятіе о главныхъ точкахъ и новое опредѣленіе количества K_2. Существенно особые случаи перваго рода.

n^0 19. Переходимъ къ разсмотрѣнію процессовъ вычисленія приближенной величины интеграла (1) въ особыхъ случаяхъ перваго рода.

Эти случаи находятся въ связи съ понятіями о *критическомъ* основномъ пути ABC и *критическомъ* значеніи количества K_2 (см. n^0 4). Критическій основной путь ABC есть тотъ, для котораго количество K_2 обращается въ *minimum*, но *обусловленный* важнымъ требованіемъ, чтобы путь ABC былъ при этомъ *хорошо направленнымъ* въ томъ смыслѣ, какъ выяснено въ n^0 4. Необходимость послѣдняго условія вытекаетъ изъ очень тонкихъ соображеній, кои легко упустить изъ виду и впасть въ противорѣчіе.

Этотъ *обусловленный* minimum K_2 не всегда совпадаетъ съ *безусловнымъ*, каковое несовпаденіе особенно важно при обстоятельствахъ, приближающихся къ особому случаю перваго рода.

Для основного пути ABC, нехорошо направленнаго, minimum количества K_2 можетъ удовлетворять первому главному условію, указанному въ § 3 (n^0 4); но это можетъ послужить лишь къ недоразумѣнію, если критическое значеніе K_2, т. е.

minimum K_2, обусловленный хорошимъ направленіемъ пути ABC, будетъ стремиться къ совпаденію съ K_1. Негодность при этихъ обстоятельствахъ, *характеризующихъ особый случай перваго рода*, прежнихъ формулъ, если бы мы взяли въ нихъ необусловленный minimum K_2, сказалась бы при тѣхъ изслѣдованіяхъ, кои разсматриваются въ *nn*° 10 (пункт. II) и 12 и связаны съ вопросомъ о предѣлахъ члена ρ_8, входящаго въ составъ погрѣшности Δ_8. Разборъ этихъ вопросовъ, а также формулъ, приведенныхъ въ *n*° 10, представленъ выше (въ *n*° 12) и обнаруживаетъ при этихъ обстоятельствахъ неблагопріятное вліяніе на результаты нѣкоторыхъ точекъ, обойденныхъ нехорошо направленнымъ основнымъ путемъ ABC съ цѣлію понизить значеніе K_2.

Въ виду важности этихъ вопросовъ и понятія о путяхъ хорошо и нехорошо направленныхъ, иллюстрируемъ связанныя съ ними представленія чертежомъ, имѣя въ виду особый случай перваго рода и воображая, для простоты, что основной путь ABC имѣетъ только одну главную точку ζ. При этомъ необходимо представить себѣ семейство *изомодулярныхъ* кривыхъ L_x, указанныхъ въ *n*° 4. Напомнимъ, что точка z изомодулярной кривой L_x удовлетворяетъ уравненію:

$$| \psi (z) | = K_1 e^{-x},$$

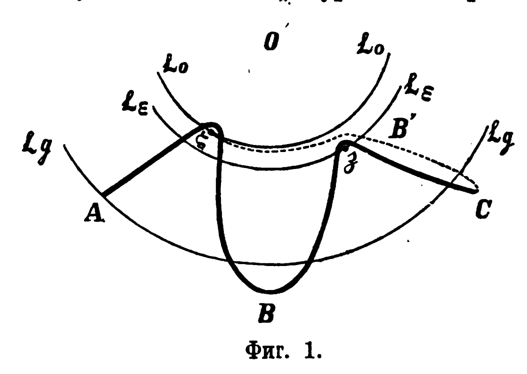
гдѣ x есть *дѣйствительная* величина.

На фигурѣ 1 изображенія соотвѣтствуютъ случаю, когда $\psi (z) = z^{-1}$, при чемъ изомодулярныя кривыя L_x будутъ окружностями, описанными изъ центра O. Радіусъ окружности L_x представляется величиною

$$r = \frac{e^x}{K_1}$$

и *возрастаетъ* при увеличеніи x. Главная точка ζ при указанномъ выборѣ функціи $\psi (z)$ должна быть особою точкою функціи $f(z)$. Въ этой точкѣ должна быть укрѣплена игла, при

чемъ точка ζ пути ABC будетъ представлять, собственно говоря, исчезающую петлю. На фигурѣ 1 изображены: 1) изо-



Фиг. 1.

модулярная кривая L_0, на которой должна лежать точка ζ, 2) изомодулярная кривая L_g, играющая роль, указанную въ n^0 4, и соотвѣтствующая *конечному* положительному значенiю g, 3) изомодулярная кривая L_ε, соотвѣтствующая *безконечно малому* положительному значенiю ε, 4) особая точка $\mathfrak{z}$ функцiи $f(z)$, лежащая на кривой L_ε и находящаяся на *конечномъ* разстоянiи отъ главной точки ζ, 5) хорошо направленный путь ABC, представленный утолщенною линiей и имѣющiй петли вблизи точекъ ζ и $\mathfrak{z}$ и проходящiй чрезъ эти точки, когда петли обращаются въ точки, и 5) путь $AB'C$, эквивалентный пути ABC и имѣющiй нехорошо направленное звено $\zeta B'C$, изображенное пунктированною линiей.

Для пути $AB'C$, изображеннаго на фигурѣ 1, значенiе величины K_2 будетъ некритическое и представится такъ:

$$K_2 = |\,\psi(A)\,| = K_1\, e^{-g}.$$

Докажемъ, что при такомъ значенiи количества K_2 направленiе основного пути $AB'C$ не можетъ быть хорошимъ въ установленномъ смыслѣ (см. n^0 4). Вѣтвь $\zeta B'C$ пути $AB'C$ должно построить такъ, чтобы при движенiи по ней точки z, начиная отъ точки ζ, модуль фукцiи $\psi(z)$ *постоянно* убывалъ до величины K_2. Такое именно построенiе изображено на фигурѣ 1, при чемъ условiе эквивалентности этой вѣтви съ вѣтвью $\zeta\ BC$ пути ABC потребовало направить кривую $\zeta B'C$ въ обходъ особой

точки $\mathfrak{z}$, т. е. въ безконечно узкой полосѣ между сливающимися въ предѣлѣ окружностями L_0 и L_ε. При такихъ обстоятельствахъ вѣтвь $\zeta B'C$ должна встрѣчать кривыя семейства L_x при $0 \leqq x \leqq \varepsilon$ подъ углами, безконечно близкими къ 0 или π. Это противорѣчитъ хорошему направленію пути $AB'C$. Легко при этомъ видѣть и связь этого нехорошаго направленія съ нарушеніемъ второго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 6). Для вѣтви $\zeta B'C$ наибольшія значенія указанныхъ въ n^0 6 отношеній $\frac{h}{x}$ и $\frac{dh}{dx}$, вліяющія на величину μ, входящую въ формулу (68), будутъ стремиться къ безконечности съ приближеніемъ ε къ нулю, а также будетъ стремиться къ безконечности наибольшее значеніе μ_0 отношенія $l:x$, входящее въ въ формулы ($65_4''$) и (66). Эти обстоятельства, а также присутствіе вблизи вѣтви $\zeta B'C$ особой точки $\mathfrak{z}$ функціи B_s, которая вліяетъ на величины μ и μ', входящія въ формулы (68) и (66), дѣлаютъ въ данномъ случаѣ негодными формулы для опредѣленія чувствительныхъ предѣловъ члена ρ_s, представляемаго равенствомъ (24).

Далѣе легко видѣть, что для изображеннаго на фигурѣ 1 пути ABC, удовлетворяющаго условіямъ хорошаго направленія, критическое значеніе количества K_2 будетъ:

$$K_2 = |\psi(\mathfrak{z})| = K_1 e^{-\varepsilon}.$$

Очевидно, оно будетъ безконечно близкимъ къ K_1. Слѣдовательно, при этихъ обстоятельствахъ мы будемъ имѣть дѣло съ формулами, негодными для опредѣленія чувствительеныхъ предѣловъ погрѣшностей δ_k, представляемыхъ равенствами вида (27').

Выходъ изъ этихъ затрудненій можетъ быть найдемъ только путемъ отдѣльнаго разсмотрѣнія особыхъ случаевъ перваго рода.

Вообще особые случаи перваго рода, какъ выяснено въ § 3 (n^0 5), имѣютъ мѣсто тогда, когда для критическаго основного пути ABC отношеніе $K_2 : K_1$ стремится къ 1 вслѣдствіе измѣненія нѣкоторыхъ параметровъ, отъ которыхъ могутъ зависѣть какъ предѣлы A и C интеграціи, такъ

интегрируемая функція [1]). Но характеръ этихъ особыхъ случаевъ можетъ быть весьма различный, при чемъ эти случаи иногда требуютъ измѣненій въ самомъ процессѣ вычисленія (см. n^0 20), а иногда требуютъ лишь нѣкотораго расширенія понятій (см. n^0 21), коими мы руководились въ обыкновенныхъ случаяхъ.

Остановимъ ниже вниманіе на слѣдующихъ двухъ простѣйшихъ обстоятельствахъ, при которыхъ имѣетъ мѣсто особый случай перваго рода: 1) когда нѣкоторыя звенья основного пути ABC (см. n^0 8) имѣютъ малую длину, стремящуюся къ нулю, и 2) когда неглавныя точки основного пути ABC вслѣдствіе измѣненія параметровъ, отъ которыхъ зависятъ функціи $\psi(z)$ и $f(z)$ и предѣлы A и C интеграціи, дѣлаются въ предѣлѣ главными. Послѣ этого установимъ понятіе о *существенно* особыхъ случаяхъ перваго рода, кои имѣютъ связь съ особыми случаями второго рода (см. § 7).

n^0 20. Пусть нѣкоторыя звенья основного пути ABC имѣютъ настолько малое протяженіе, что модуль R функціи $\psi(z)$ на

---

[1]) Замѣтимъ, что при близости отношенія $K_2 : K_1$ къ 1 формулы предшествующихъ параграфовъ не всегда безусловно негодны, ибо онѣ зависятъ отъ выраженія $(K_2 : K_1)^m$, которое, если отношеніе $K_2 : K_1$ еще не обратилось въ 1, иногда можетъ быть достаточно мало. Все дѣло зависитъ отъ порядка σ, опредѣляемаго уравненіемъ:

$$\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^m = \frac{1}{m^\sigma}.$$

Этотъ порядокъ представляется произведеніемъ $\frac{m}{lg\,m}\cdot g$, гдѣ g опредѣляется равенствомъ (70), и можетъ быть иногда достаточно высокъ, несмотря на малый множитель g, ибо другой множитель $\frac{m}{lg\,m}$ весьма великъ. Предшествующіе пріемы приближеннаго вычисленія интеграла $[ABC]$ становятся негодными, если порядокъ σ будетъ недостаточно высокъ. Впрочемъ лучше всего при оцѣнкѣ годности ихъ руководиться разсмотрѣніемъ предѣловъ погрѣшности.

этомъ протяженіи колеблется въ тѣсныхъ предѣлахъ [1]). При этихъ условіяхъ maximum maximorum K_1 модуля R функціи $\psi(z)$ для точекъ z кривой ABC будетъ мало отличаться отъ величины K_2, соотвѣтствующей тому же пути. Слѣдовательно, отношеніе $K_2 : K_1$ будетъ близко къ 1, а величина g, опредѣляемая равенствомъ (70), будетъ близка къ нулю. При этихъ условіяхъ вышеуказанные процессы, опредѣляющіе приближенную величину интеграла $[ABC]$, становятся негодными.

Въ такомъ случаѣ звенья весьма малой длины надлежитъ *выдѣлить* изъ состава основного пути ABC и разсмотрѣть эти звенья отдѣльно отъ кривой L, составленной изъ оставшихся звеньевъ. Къ кривой L можно примѣнить *новую* консервативную деформацію для пониженія отношенія $K_2 : K_1$ и затѣмъ воспользоваться вышеуказанными процессами вычисленія соотвѣтствующаго интеграла. Что̀ же касается звеньевъ основного пути ABC, имѣющихъ весьма малую длину, то для приближеннаго вычисленія соотвѣтствующихъ имъ интеграловъ существуютъ особые процессы, къ разсмотрѣнію которыхъ мы перейдемъ.

Предположимъ, что ζ есть главная точка и $\xi\xi'$ есть соотвѣтствующее звено основного пути ABC, принадлежащее ко *второму* роду и имѣющее весьма малую длину. Это звено втораго рода переходитъ въ звено перваго рода, если одна изъ

---

[1]) Разсматриваемый случай представляетъ большую важность. Между прочимъ, онъ часто представляется въ Теоріи Вѣроятностей. Такъ, въ теоремѣ, обратной теоремѣ Якова Бернулли, приходится вычислять приближенную величину интеграла

$$\int_{\alpha-t}^{\alpha+t} f(x)\,\{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\}^{m}\,dx,$$

въ которомъ t есть весьма малое количество. Равнымъ образомъ при выводѣ прямой теоремы Бернулли, теоремы Пуассона и другихъ важнѣйшихъ теоремъ о вѣроятностяхъ массовыхъ явленій также имѣютъ мѣсто случаи этого рода.

точекъ ξ и ξ' сливаенся съ точкой ζ. По этому въ данномъ случаѣ удобнѣе не разбивать звена $\xi\,\xi'$ на звенья перваго рода $\xi\zeta$ и $\zeta\xi'$.

Само собою разумѣется, что при настоящихъ обстоятельствахъ мы вправѣ разсматривать лишь тотъ случай, когда функція $f(z)$ при $z=\zeta$ сохраняетъ конечное значеніе или обращается въ безконечность порядка менѣе 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$. Требуется при этихъ условіяхъ получить приближенное выраженіе интеграла:

$$[\xi\xi'] = \int\limits_{(\xi\xi')} f(z)\,\psi^m(z)\,dz. \qquad (136)$$

Предположимъ при этомъ, что ζ не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и что ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія: $\psi(z)=\psi(\zeta)$.

Для полученія искомаго приближеннаго выраженія интеграла $[\xi\xi']$ разсмотримъ отдѣльно, во-первыхъ, пріемъ, основанный на преобразованіи перемѣннаго z при помощи уравненія, которое получается изъ уравненія вида (17) замѣною y чрезъ y^ν, и, во-вторыхъ, пріемъ, основанный на разложеніи интегрируемой функціи по функціямъ вида:

$$e^{-mH(z-\zeta)^\nu}(z-\zeta)^k,$$

гдѣ H есть опредѣленное постоянное количество.

I. Положимъ:

$$\psi(z)=\psi(\zeta)\,e^{-y^\nu}. \qquad (137)$$

Уравненіе это приводится къ виду:

$$z-\zeta = y\,\Theta(z), \qquad (137_1)$$

гдѣ

$$\Theta(z)=\left\{\frac{(z-\zeta)^\nu}{\lg\psi(\zeta)-\lg\psi(z)}\right\}^{\frac{1}{\nu}}. \qquad (137_2)$$

Выраженію $\Theta(z)$, имѣющему ν значеній, должно приписать опредѣленное значеніе. Такъ, если z и $\psi(z)$ дѣйствительныя количества для точекъ z звена $\xi\xi'$, то значеніе функціи $\Theta(z)$ должно избрать такъ, чтобы количества:

$$\eta = \frac{\xi - \zeta}{\Theta(\xi)} \text{ и } \eta' = \frac{\xi' - \zeta}{\Theta(\xi')} \qquad (137_3)$$

были также дѣйствительными.

Обозначимъ вообще чрезъ $\eta\eta'$ путь, описываемый точкою y, для которой имѣетъ силу уравненіе (137_1), въ то время, когда точка z описываетъ звено $\xi\xi'$. Будемъ имѣть:

$$[\xi\xi'] = \psi^m(\zeta) \int_{(\eta\eta')} e^{-my^\nu} f(z) \frac{dz}{dy} dy. \qquad (138)$$

Затѣмъ постараемся получить для функціи

$$\Pi(y) = f(z) \frac{dz}{dy}$$

разложеніе, подобное разложенію вида (19). Въ данномъ случаѣ, т.е. при весьма малой длинѣ пути $\xi\xi'$, для полученія этого разложенія *особенно удобно примѣненіе теоріи ряда Лагранжа съ теоремою Коши-Руше*, ибо при этомъ особенно легко удовлетворить всѣмъ условіямъ этой теоремы для точекъ y преобразованнаго пути $\eta\eta'$, длина котораго будетъ весьма малая. Требуемое примѣненіе ряда Лагранжа съ теоремою Коши-Руше подобно тому, которое выполнено въ $n^0 13$.

Для функціи $f(z)$ вида:

$$f(z) = (z - \zeta)^{\beta - 1} \phi(z), \qquad (138_1)$$

гдѣ $\phi(z)$ есть функція голоморфная въ области точки $z = \zeta$ и не обращающаяся въ нуль при $z = \zeta$, будемъ имѣть:

$$\Pi(y) = f(z) \frac{dz}{dy} = y^{\beta - 1} H(z), \qquad (138_2)$$

гдѣ

$$H(z) = \frac{\Theta^{\beta+1} \phi(z)}{\Theta(z) - (z-\zeta)\,\Theta'(z)}\,. \qquad (138_3)$$

Выбравъ положительное число r такъ, чтобы оно было менѣе разстоянія точки ζ отъ ближайшей особой точки функцій $H(z)$ и $\Theta(z)$, обозначимъ чрезъ N и M модули maximum maximorum функцій

$$H'(\zeta + re^{\omega i}) \text{ и } \frac{1}{r}\Theta(\zeta + re^{\omega i})$$

при возрастаніи ω отъ 0 до 2π. Предположимъ, что для всѣхъ точекъ y пути $\eta\eta'$ имѣемъ мѣсто неравенство:

$$|y|\,.M < 1. \qquad (138_4)$$

Такъ какъ для весьма малаго звена $\xi\xi'$ путь $\eta\eta'$ эквивалентенъ пути $\eta 0 \eta'$, составленному изъ прямолинейныхъ отрѣзковъ $\eta 0$ и $0\eta'$, то пусть деформаціей звена $\xi\xi'$ путь $\eta\eta'$ приведенъ въ совпаденіе съ ломаною линіей $\eta 0 \eta'$. При этомъ условіе (138_4), которое должно имѣть силу для всѣхъ точекъ y пути $\eta\eta'$, замѣняется условіями:

$$|\eta|\,.M < 1 \text{ и } |\eta'|\,.M < 1. \qquad (138_5)$$

Выполненіе этихъ условій обезпечено вообще тѣмъ, что количества $|\eta|$ и $|\eta'|$ весьма малы, а количество r можетъ быть выбрано такъ, чтобы величина M принимала наименьшее значеніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ будутъ выполнены всѣ условія примѣненія теоремы Коши-Руше къ разложенію по формулѣ Лагранжа функціи $H(z)$, а затѣмъ функціи $\Pi(y)$. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\Pi(y) = H(\zeta)\,y^{\beta-1} + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{y^{\beta+k-1}}{1.2\ldots k}\,\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}$$

$$+ \frac{\lambda.\frac{r}{s}\,.\,N\,.\,M^s\,.\,y^{\beta+s-1}}{1-|y|\,.M}\,, \qquad |\lambda| < 1. \quad (138_6)$$

Пользуясь этимъ разложеніемъ, будемъ имѣть:

$$[\xi\xi'] = \psi^m(\zeta)\Big\{H(\zeta)J_0 + \frac{1}{1}H'(\zeta)\,\Theta(\zeta)\,J_1 +$$

$$+ \frac{1}{1.2}\frac{d\{H'(\zeta)\,\Theta^2(\zeta)}{d\zeta}\,J_2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots(s-1)}\frac{d^{s-2}\{H'(\zeta)\,\Theta^{s-1}(\zeta)\}}{d\zeta^{s-2}}\,J_{s-1} + \rho_s\Big\}, \qquad (139)$$

гдѣ

$$J_k = \int_{r} e^{-my^\nu}\; y^{\beta+k-1}\,dy, \qquad (139_1)$$

$$\rho_s = \int_{(\eta\eta')} e^{-my^\nu}\,.\,\lambda\,.\,\frac{r}{s}\frac{N.M^s.y^{\beta+s-1}\,dy}{1-|y|.M}. \qquad (139_2)$$

Формула (139) опредѣляетъ искомую приближенную величину интеграла $[\xi\xi']$, принимая количество ρ_s за погрѣшность. Составляя формулу для опредѣленія предѣловъ этой погрѣшности, представимъ равенство (139_2) въ формѣ:

$$\rho_s = \rho''_s - \rho'_s, \qquad (139_3)$$

гдѣ

$$\rho'_s = \int_{(0\eta)} \quad \text{и} \quad \rho''_s = \int_{(0\eta')}, \qquad (139_4)$$

при чемъ подразумѣваемая интегрируемая функція въ интегралахъ, стоящихъ во вторыхъ частяхъ равенствъ (139_4), одинаковая съ функціей, стоящей подъ знакомъ интеграла (139_2). Преобразуя въ интегралахъ (139_4) перемѣнное y при помощи соотвѣтствующихъ уравненій:

$$y = m^{-\frac{1}{\nu}}.\eta.u \quad \text{и} \quad y = m^{-\frac{1}{\nu}}.\eta'.u$$

и притомъ считая пути 0η и $0\eta'$ за прямолинейные, затѣмъ разсматривая модули преобразованныхъ интеграловъ, убѣждаемся, что

$$|\rho'_s| < \frac{r.N.M^s.\,|\eta^{\beta+s}|}{s\,.\,m^{\frac{\beta'+s}{\nu}}(1-|\eta|M)} \int_0^{m^{\frac{1}{\nu}}} e^{-x_0 u^\nu}\, u^{\beta'+s-1}\, du, \tag{139$_5$}$$

$$|\rho''_s| < \frac{r.N.M^s.\,|\eta'^{\beta+s}|}{s\,.\,m^{\frac{\beta'+1}{\nu}}(1-|\eta'|M)} \int_0^{m^{\frac{1}{\nu}}} e^{-x'_0 u^\nu}\, u^{\beta'+s-1}\, du, \tag{139$_6$}$$

гдѣ β', x_0 и x'_0 суть дѣйствительныя части количествъ β, η^ν и η'^ν. Помощію равенства (139_3) и неравенствъ (139_5) и (139_6) убѣждаемся, что

$$\rho_s = \frac{\lambda_1 .r.N.M^s}{s.m^{\frac{\beta'+s}{\nu}}} \cdot \int_0^{m^{\frac{1}{\nu}}} W(u)\; u^{\beta'+s-1}\, du, \tag{140}$$

$$W(u) = \frac{|\eta^{\beta+s}|.e^{-x_0 u^\nu}}{1-|\eta|.M} + \frac{|\eta'^{\beta+s}|.e^{-x'_0 u^\nu}}{1-|\eta'|.M}, |\lambda_1| < 1. \tag{141}$$

Въ различныхъ приложеніяхъ найденныхъ формулъ къ Теоріи Вѣроятностей приходится имѣть дѣло съ случаями менѣе общими, въ которыхъ приходится полагать: $\nu=2$, $\beta=1$ и считать интегрируемую функцію и перемѣнныя z и y дѣйствительными. При этихъ условіяхъ вышеприведенныя формулы упрощаются. Такъ, интегралъ J_k, опредѣляемый равенствомъ (139_1), представляется такъ:

$$J_k = \int_\eta^{\eta'} e^{-my^2} y^k\, dy, \tag{142}$$

а формула (139_2) приводится къ виду:

$$\rho_s = \int_{\eta}^{\eta'} e^{-my^2} \frac{\lambda . \frac{r}{s} N . M^s . y^s \, dy}{1 - |y| . M}, \; -1 < \lambda < +1 . \quad (143)$$

Изъ этого выраженія ρ_s и изъ формулы (2) видно, что

$$R_s = \lambda . \frac{r}{s} . \frac{N . M^s}{1 - v . M} \int_{\eta}^{\eta'} e^{-my^2} y^s \, dy = \lambda . \frac{N . M^s}{1 - v . M} . J_s, \quad (144)$$

$$-1 < \lambda < +1,$$

гдѣ v есть наибольшее изъ количествъ $|\eta|$ и $|\eta'|$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ интеграція по частямъ даетъ возможность вычисленіе всѣхъ интеграловъ J_k вида (142) свести къ вычисленію интеграловъ J_1 и J_0. При этомъ величина интеграла J_0 находится помощію извѣстныхъ таблицъ, а интегралъ J_1 выражается въ простой конечной формѣ.

Примѣръ примѣненія вышеприведенныхъ формулъ данъ въ §§ II и III моей статьи: «*Предѣлы погрѣшностей приближенныхъ выраженій вѣроятности P, разсматриваемой въ теоремѣ Якова Бернулли*» и въ дополненіи къ этой статьѣ (Матем. Сборн., т. XX, 1898).

Особенность указаннаго сейчасъ процесса вычисленія интеграла $[\xi\xi']$ для весьма малаго звена $\xi\xi'$, между прочимъ, состоитъ въ томъ, что онъ не утрачиваетъ силы *при удлинненіи* пути $\xi\xi'$.

Этою особенностію не обладаетъ другой процессъ вычисленія интеграла $[\xi\xi']$, къ разсмотрѣнію котораго мы теперь переходимъ.

II. Разсмотримъ здѣсь процессъ вычисленія интеграла $[\xi\xi']$, основанный на разложеніи интегрируемой функціи $f(z)\,\psi^m(z)$ по функціямъ вида:

$$e^{-mH(z-\zeta)^\nu} \, (z-\zeta)^n,$$

гдѣ ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$. При этомъ предположимъ, что функція $f(z)$ въ области точки $z=\zeta$ представляется подъ формой (138_1) и что весьма малое звено $\xi\xi'$ не выходитъ изъ предѣловъ круга сходимости разложенія функціи $f(z)\psi^m(z)$ въ рядъ Тейлора по степенямъ $z-\zeta$.

Это послѣднее предположеніе даетъ намъ право въ дальнѣйшемъ считать путь $\xi\xi'$ за пару прямолинейныхъ отрѣзковъ $\xi\zeta$ и $\zeta\xi'$ съ которыми онъ можетъ быть приведенъ въ совпаденіе консервативной деформаціей.

Количество H можемъ выбрать произвольно. Но по особому мотиву, который выяснится немного позже этому количеству надлежитъ дать слѣдующее значеніе:

$$H=\frac{-\psi^{(\nu)}(\zeta)}{1.2\ldots\nu.\psi(\zeta)}. \tag{145}$$

Далѣе положимъ:

$$F(z)=\phi(z)\left\{\frac{\psi(z)}{\psi(\zeta)}\right\}^m e^{mH(z-\zeta)^\nu} \tag{146}$$

и затѣмъ разложимъ функцію $F(z)$ въ рядъ Тейлора по степенямъ $z-\zeta$. Получимъ:

$$F(z)=F(\zeta)+F'(\zeta)\frac{z-\zeta}{1}+\ldots+F^{(s-1)}(\zeta)\frac{(z-\zeta)^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}+R_s, \tag{147}$$

гдѣ R_s есть дополнительный членъ, который для точекъ z пути $\xi\xi'$, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ отрѣзковъ $\xi\zeta$ и $\zeta\xi'$, можетъ быть представленъ такъ:

$$R_s=\frac{(z-\zeta)^s}{1.2\ldots(s-1)}\int_0^1(1-x)^{s-1}F^{(s)}\Big(\zeta+x(z-\zeta)\Big)dx. \tag{147'}$$

При помощи соотвѣтствующей изъ формулъ (2) и (4) равенство (147′) приводится къ виду:

$$R_s=\frac{\lambda(z-\zeta)^s}{1.2\ldots s}F^{(s)}\Big(\zeta+\theta(z-\zeta)\Big),\ 0<\theta<1, \tag{148}$$

гдѣ $\lambda = 1$, если количество $F^{(s)}\Big(\zeta + \theta(z-\zeta)\Big)$ дѣйствительное, и $|\lambda| < 1$, если количество $F^{(s)}\Big(\zeta + \theta(z-\zeta)\Big)$ мнимое.

Изъ равенствъ (138_1), (146) и (147) слѣдуетъ, что

$$f(z)\psi^m(z) = \psi^m(\zeta)\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1}\frac{F^{(k)}(\zeta)}{k!}e^{-mH(z-\zeta)^\nu}(z-\zeta)^{\beta+k-1}\right.$$

$$\left. + (z-\zeta)^{\beta-1}R_s e^{-mH(z-\zeta)^\nu}\right\}. \qquad (149)$$

Вторая часть равенства (149) имѣетъ общій множитель

$$e^{-mH(z-\zeta)^\nu},$$

модуль котораго при значеніи H, опредѣляемомъ помощію уравненія (145), долженъ *убывать*, когда точка z движется по звену $\xi\xi'$ отъ точки ζ. Въ этомъ убѣждаемся изъ разсмотрѣнія разложенія функціи $\psi(z)$ по степенямъ $z-\zeta$, которое имѣетъ видъ:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\,\{1 - H(z-\zeta)^\nu + \ldots\},$$

и изъ того, что модуль $\psi(z)$ *убываетъ* при движеніи точки z по звену $\xi\xi'$ отъ точки ζ, при чемъ дѣйствительная часть количества $H(z-\zeta)^\nu$ должна быть *положительною*. Это свойство выгодно отражается на дальнѣйшихъ вычисленіяхъ, въ чемъ и заключается мотивъ, оправдывающій вышеуказанный выборъ количества H.

Теперь при помощи разложенія (149) убѣждаемся, что интегралъ $[\xi\xi']$ представляется такъ:

$$[\xi\xi'] = \psi^m(\zeta)\left\{F(\zeta)\,J_0 + \frac{F'(\zeta)}{1}J_1 + \frac{F''(\zeta)}{1.2}J_2 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{F^{(s-1)}(\zeta)}{1.2\ldots(s-1)}J_{s-1} + \rho_s\right\}, \qquad (150)$$

гдѣ

$$J_k = \int\limits_{(\xi\xi')} e^{-mH(z-\zeta)^\nu} (z-\zeta)^{\beta+k-1}\, dz, \qquad (150')$$

$$\rho_s = \int\limits_{(\xi\xi')} R_s\, e^{-mH(z-\zeta)^\nu} (z-\zeta)^{\beta-1}\, dz. \qquad (150'')$$

Въ формулѣ (150) ρ_s есть погрѣшность приближеннаго выраженія интеграла $[\xi\xi']$. По поводу опредѣленія предѣловъ этой погрѣшности сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія.

При дѣйствительныхъ значеніяхъ перемѣннаго z и функцій $f(z)$ и $\psi(z)$ формула (150″) приводитъ къ слѣдующему равенству:

$$\rho_s = \int\limits_{\xi}^{\xi'} R_s\, e^{-mH(z-\zeta)^\nu} (z-\zeta)^{\beta-1}\, dy. \qquad (151)$$

Помощію этого равенства и формулы (148), а также формулы (2) убѣждаемся, что

$$\rho_s = \frac{F^{(s)}\big(\zeta + \theta(\xi_0 - \xi)\big)}{1.2\ldots s} . J_s, \quad 0 < \theta < 1, \ \xi < \xi_0 < \xi'; \qquad (151')$$

$$J_s = \int\limits_{\xi}^{\xi'} e^{-mH(z-\zeta)^\nu} (z-\zeta)^{\beta+s-1}.\, dz. \qquad (151'')$$

Примѣръ примѣненія формулъ (150) и (151′), данъ въ § I моей статьи: «*Предѣлы погрѣшностей приближенныхъ выражежeній вѣроятности P, разсматриваемой въ теоремѣ Якова Бернулли*» и въ дополненіи къ этой статьѣ (Матем. Сборникъ, т. XX, 1898).

Какъ видно изъ равенства (146), коеффиціенты въ разложеніи (147) и въ формулѣ (150) зависятъ отъ большого числа m, которое также скрыто содержится и въ выраженіи R_s, опредѣляемомъ при помощи равенства (147′). Это обстоятельство

неблагопріятно вліяетъ на погрѣшность ρ_8, если путь $\xi\xi'$ удлинняется. Эта особенность формулы (150) не принадлежитъ, какъ мы видѣли, формулѣ (138). Поэтому послѣдняя формула предпочтительнѣе, когда порядокъ малой величины $\xi - \zeta$ относительно $\frac{1}{m}$ менѣе высокъ; а формула (150) предпочтительнѣе, когда, наоборотъ, этотъ порядокъ болѣе высокъ. Какая изъ этихъ формулъ выгоднѣе въ данномъ случаѣ, это еще лучше рѣшается сравненіемъ предѣловъ погрѣшностей.

n° 21. Въ предшествующемъ *n*° мы разсмотрѣли одинъ изъ такихъ случаевъ перваго рода, которые потребовали нѣкотораго отступленія отъ формулъ, указанныхъ въ §§ 4 и 5. Но существуетъ обширная группа такихъ особыхъ случаевъ перваго рода, въ которыхъ почти не приходится дѣлать отступленій отъ прежнихъ пріемовъ и формулъ, но въ которыхъ необходимо лишь *расширить* нѣсколько понятіе о главныхъ точкахъ. Одного этого расширенія бываетъ достаточно, чтобы устранить всѣ затрудненія и превратить эти особые случаи въ *обыкновенные*.

Такіе особые случаи перваго рода связаны съ существованіемъ такъ называемыхъ *подглавныхъ* точекъ, играющихъ столь же важную роль, какъ и главныя точки.

Новое понятіе о подглавныхъ точкахъ, котораго не имѣли въ виду прежніе авторы, составляется легко, исходя изъ представленій о случаяхъ обыкновенныхъ, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ возможности примѣненія процессовъ приближеннаго вычисленія, основанныхъ на теоремѣ IV (*n*° 9) и отдѣленіи второстепенныхъ частей (*n*° 10, пункт. I), или же на теоремѣ VI (*n*° 10, пункт. II).

Вообразимъ одинъ изъ такихъ обыкновенныхъ случаевъ. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, отношеніе $K_2 : K_1$ на *конечную* величину менѣе 1, такъ что выполняется безусловно первое главное условіе, указанное въ § 3 (*n*° 4). Предположимъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что основной путь ABC имѣетъ не менѣе *двухъ* главныхъ точекъ. (Такому требованію удовлетворяетъ, напримѣръ, при $D > 1$ основной путь Λ, разсмотрѣнный въ *n*° 7 и имѣющій важное значеніе въ Теоріи Вѣроят-

ностей). Каждая изъ главныхъ точекъ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ $(n > 1)$ разсматриваемаго основного пути ABC окажетъ свое вліяніе на приближенное выраженіе интеграла $[ABC]$, внося въ составъ этого выраженія соотвѣтствующее слагаемое. Эти слагаемыя обозначимъ соотвѣтственно чрезъ

$$K_1^m Z_1, \; K_1^m Z_2, \ldots, K_1^m Z_n,$$

такъ что будемъ имѣть:

$$[ABC] = K_1^m \{ Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n + \Delta \}, \qquad (152)$$

гдѣ Δ есть погрѣшность. При этомъ, какъ легко убѣдиться, порядки количествъ $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ относительно $\frac{1}{m}$ будутъ представляться конечными числами. Далѣе, для главныхъ точекъ имѣемъ равенства:

$$|\psi(\zeta_1)| = |\psi(\zeta_2)| = \ldots = |\psi(\zeta_n)|. \qquad (152')$$

Предположимъ теперь, что функціи $\psi(z)$ и $f(z)$ и предѣлы интеграціи A и C зависятъ отъ нѣкоторыхъ параметровъ, способныхъ измѣняться непрерывно, и вообразимъ весьма малыя измѣненія этихъ параметровъ, достаточныя для того, чтобы *нарушить* равенства (152′). При этомъ непремѣнно окажется, что число главныхъ точекъ сдѣлается *менѣе n*. Такое примѣчательное обстоятельство предшествующими авторами не выясняется и даже можетъ въ ихъ теоріи привести къ пропуску во второй части равенства нѣсколькихъ слагаемыхъ, соотвѣтствующихъ точкамъ, кои перестали быть главными, хотя на самомъ дѣлѣ вліяніе такихъ слагаемыхъ на сумму можетъ быть значительно сравнительно съ прочими слагаемыми. Такой пропускъ могъ бы пройти даже совершенно незамѣченнымъ при отсутствіи оцѣнки предѣловъ погрѣшности приближеннаго выраженія интеграла $[ABC]$.

Очевидно, при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ на приближенную величину интеграла $[ABC]$ будутъ вліять не однѣ только главныя точки основного пути ABC, но и другія точки,

которыя при весьма маломъ измѣненіи параметровъ перешли изъ главныхъ точекъ въ неглавныя и, обратно, могутъ изъ неглавныхъ опять сдѣлаться главными, благодаря новымъ весьма малымъ измѣненіямъ параметровъ.

Теперь остается сдѣлать лишь одно важное замѣчаніе, послѣ котораго можно будетъ установить строгое понятіе о подглавныхъ точкахъ.

Вообразимъ группу точекъ

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, , \mathfrak{z}_3, \ldots, \tag{153}$$

въ составъ которой входятъ: 1) всѣ изображенія корней уравненія : $\psi'(z) = 0$, для которыхъ функція $\psi(z)$ не есть нуль, 2) всѣ особыя точки функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, для которыхъ функція $\psi(z)$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность, и 3) точки A и C, если онѣ при консервативной деформаціи пути ABC не могутъ быть перемѣщаемы и не совпадаютъ съ изображеніями корней уравненія $\psi(z) = 0$. При этомъ положеніе точекъ (153), которое вообще зависитъ отъ тѣхъ же параметровъ, будетъ измѣняться непрерывно. Главныя точки, которыя какъ пояснено въ n^0 3 и полнѣе будетъ доказано въ § 8, должны принадлежать къ групѣ точекъ (153) [1]), также будутъ зависѣть отъ параметровъ и также будутъ непрерывно перемѣщаться при измѣненіи параметровъ.

Замѣтивъ это, вообразимъ первоначальное положеніе вышеупомянутыхъ главныхъ точекъ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, для которыхъ имѣютъ силу равенства (152′) и выполняются всѣ условія полученія приближеннаго выраженія интеграла $[ABC]$ по формулѣ (152). Затѣмъ предположимъ, что вышеупомянутые параметры безконечно мало измѣнились и равенства (152′) нарушились. Вмѣстѣ съ тѣмъ группа точекъ (153) можетъ опредѣленнымъ образомъ передвинуться, а также могутъ перемѣститься точки

---

[1]) Не трудно убѣдиться при помощи консервативной деформаціи и понятія о главной точкѣ, что никакая точка, не принадлежащая къ группѣ (153), не можетъ быть главной.

$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, составляющія часть этой группы, занявъ новыя положенія, которыя не трудно отличить, ибо точки эти будутъ соотвѣтственно весьма близкими къ первоначальнымъ положеніямъ. *Эти новыя положенія точекъ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ образуютъ, всѣ вмѣстѣ, совокупность главныхъ и подглавныхъ точекъ*, при чемъ тѣ изъ нихъ, для которыхъ модуль $\psi(z)$ имѣетъ *наибольшее* значеніе K_1, будутъ *главными*, а всѣ остальныя *подглавными*. Вмѣстѣ тѣ и другія точки будемъ называть *главными въ расширенномъ смыслѣ*.

Вообще, *если ζ есть одна изъ точекъ (153) и если, не будучи главною, она при весьма маломъ измѣненіи параметровъ дѣлается главною, то точка ζ есть подглавная точка основного пути ABC.*

Возникаетъ затѣмъ вопросъ о построеніи звеньевъ основного пути ABC, соотвѣтствующихъ подглавнымъ точкамъ. Построеніе это выполняется вообще въ слѣдующемъ порядкѣ. Пусть ζ есть подглавная точка. Вообразимъ сначала то положеніе ея, когда она является главною точкою, и вообразимъ также звено $\xi'\xi''$ второго рода (см. n^0 10), соотвѣтствующее этой главной точкѣ и принадлежащее основному пути ABC. Это положеніе основного пути ABC и его звена $\xi'\xi''$ назовемъ *первоначальнымъ*. Затѣмъ будемъ представлять себѣ эту кривую $\xi'\xi''$, какъ нить, точки ξ' и ξ'' которой укрѣплены неподвижно, при чемъ остальныя части нити могутъ перемѣщаться свободно, встрѣчая препятствія только въ иглахъ, укрѣпленныхъ въ особыхъ точкахъ функціи $f(z)\psi^m(z)$. Далѣе представимъ себѣ тѣ измѣненія параметровъ, кои превращаютъ главную точку ζ въ подглавную, при чемъ эти измѣненія вызовутъ передвиженіе иглъ, которыя должны перемѣщаться вмѣстѣ съ особыми точками функціи $f(z)\psi^m(z)$ и при этомъ могутъ задѣть и весьма мало деформировать нить $\xi'\xi''$. Послѣ того, какъ точка ζ сдѣлалась при данныхъ значеніяхъ параметровъ подглавной, подвергнемъ нить $\xi'\xi''$ безконечно малой *консервативной* деформаціи (при которой остаются неизмѣнными параметры и интегралъ $[\xi'\xi'']$). Эту деформацію должно произвести съ цѣлью отыскать основной путь Λ, эквивалентный пути, представ-

ляемому нитью $\xi'\xi''$. При этой консервативной деформаціи точки ξ' и ξ'' опять будутъ неподвижными, а остальныя части будутъ перемѣщаться пока maximum maximorum модуля R функціи $\psi(z)$ для точекъ z деформируемаго пути $\xi'\xi''$ не пріобрѣтетъ наименьшаго значенія. Эту консервативную деформацію постараемся осуществить такъ, чтобы выполнялись для искомаго основного пути Λ оба главныхъ условія, указанныхъ въ § 3 (*nn*° 4 и 6). Очевидно, подглавная точка ζ будетъ главною точкою основного пути Λ, эквивалентнаго пути $\xi'\xi''$. Вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ путь Λ мы и будемъ считать *звеномъ второго* рода, соотвѣтствующимъ подглавной точкѣ ζ и принадлежащимъ *новому* положенію основного пути ABC, которое соотвѣтствуетъ измѣнившимся параметрамъ.

Строеніе указаннаго звена Λ второго рода, которое попрежнему будемъ обозначать чрезъ $\xi'\xi''$ и которое можно разбить на два звена перваго рода, будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ, для примѣненія къ этимъ звеньямъ основныхъ процессовъ, изложенныхъ въ §§ 4 и 5. Если подглавная точка ζ есть особая точка функціи $f(z)\psi^m(z)$, то соотвѣтствующее ей звено $\xi'\xi''$ должно имѣть петлю $z'z''$ и можетъ быть полнѣе обозначено чрезъ $\xi'z'z''\xi''$.

Можетъ иногда случиться, что подглавною точкою будетъ та или другая изъ точекъ A и C. Въ такомъ случаѣ, первоначальному положенію этой точки, когда она является главною, будетъ соотвѣтствовать первоначальное звено перваго рода ($\zeta_0\xi_1$ или $\xi_{n-1}\zeta_n$), которое также нужно подвергнуть сначала деформаціи, вызываемой измѣненіемъ параметровъ, а потомъ отдѣльной консервативной деформаціи, дабы получить основной путь Λ, соотвѣтствующій этому пути, и наконецъ ввести этотъ основной путь въ составъ полнаго основного пути ABC, какъ звено, соотвѣтствующее разсматриваемой подглавной точкѣ.

Въ § 8 будетъ указанъ способъ построенія *ортогональнаго* основнаго пути ABC, примѣнимый одинаково какъ при отсутствіи подглавныхъ точекъ, такъ и при ихъ существованіи.

Очевидно, всѣ изложенные въ §§ 3, 4 и 5 пріемы, формулы и теоремы распространяются на случай, когда существуютъ

подглавныя точки, которыя при этомъ должно трактовать какъ главныя. Такъ, величина K_2 для основного пути ABC, имѣющаго подглавныя точки, опредѣляется по тому же правилу, которое указано въ n^0 4; но главныя точки при этомъ опредѣленіи нужно понимать не въ прежнемъ, а въ расширенномъ смыслѣ, т. е. нужно къ главнымъ точкамъ въ прежнемъ смыслѣ присоединять еще подглавныя. Слѣдовательно, при опредѣленіи величины K_2 нужно разсматривать значенія модуля R функціи $\psi(z)$, указанныя въ n^0 4, исключая изъ нихъ тѣ, кои соотвѣтствуютъ не только главнымъ точкамъ, но и подглавнымъ. Формулируемъ теперь правило для опредѣленія величины K_2 слѣдующимъ образомъ.

Пусть точка z описываетъ основной путь ABC. Будемъ при этомъ слѣдить за измѣненіями модуля R функціи $\psi(z)$, замѣчая его maximum'ы и minimum'ы, а также значенія этого модуля, соотвѣтствующія: 1) корнямъ уравненія $\psi'(z)=0$, лежащимъ на кривой ABC, 2) тѣмъ особымъ точкамъ функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, вблизи которыхъ основной путь ABC образуетъ петли, касаясь иглъ, и 3) точкамъ A и C. Изъ указанныхъ значеній модуля R исключимъ тѣ, кои соотвѣтствуютъ главнымъ и подглавнымъ точкамъ основного пути ABC, и выберемъ изъ остальныхъ замѣченныхъ значеній модуля R наибольшее, которое и обозначимъ чрезъ K_2.

Если *хорошо направленный* основной путь ABC избранъ такъ, что находимая по этому правилу величина K_2 пріобрѣтетъ *наименьшее* значеніе, то это значеніе будемъ называть попрежнему *критическимъ*.

Выяснимъ затѣмъ основанія, по которымъ разсмотрѣнный случай существованія подглавныхъ точекъ должно трактовать какъ особый случай перваго рода. Если *критическій* основной путь ABC имѣетъ подглавныя точки и если къ этому пути примѣнить *прежнія* понятія о главныхъ точкахъ, не причисляя къ нимъ подглавныхъ, то соотвѣтствующая величина K_2 получитъ *другое* значеніе: она будетъ представляться, какъ модуль функціи $\psi(z)$, соотвѣтствующій значенію z, совпадающему съ одной изъ подглавныхъ точекъ $\mathfrak{z}$ (такъ какъ при этомъ подглавнымъ точкамъ будутъ

соотвѣтствовать maximum'ы модуля R функціи $\psi(z)$ при движеніи точки z по кривой ABC, и наибольшій изъ нихъ, на основаніи указаннаго въ n° 4 правила, совпадетъ съ величиною K_2). Но если $K_2 = |\psi(\mathfrak{z})|$, гдѣ $\mathfrak{z}$ есть подглавная точка, то отношеніе $K_2 : K_1$ должно быть близкимъ къ 1 и должно стремиться къ 1 въ предѣлѣ, когда, вслѣдствіе измѣненія параметровъ, подглавная точка $\mathfrak{z}$ сдѣлается главною. Такимъ образомъ, при сохраненіи *прежнихъ* понятій, мы имѣемъ при данныхъ обстоятельствахъ особый случай перваго рода, въ которомъ формулы и процессы, изложенные въ §§ 3 — 5 теряютъ силу. Но всѣ эти затрудненія сразу устраняются однимъ только расширеніемъ понятія о главныхъ точкахъ, присоединяя къ нимъ подглавныя точки. Это расширеніе измѣнитъ опредѣленіе величины K_2 и, вообще говоря, *понизитъ* эту величину.

Случай существованія подглавныхъ точекъ встрѣчается во множествѣ вопросовъ. Такъ, онъ представляется при указанномъ ниже (въ n° 34) вычисленіи приближенной величины функціи X_m Лежандра. Случай этотъ можетъ представляться также при вычисленіи вѣроятности P_n, опредѣляемой равенствомъ (11‴).

Перейдемъ затѣмъ къ понятію о *существенно особыхъ случаяхъ перваго рода*.

Можетъ случиться, что при вышеуказанномъ новомъ опредѣленіи величины K_2, соотвѣтствующемъ *расширенному* понятію о главныхъ точкахъ, отношеніе $K_2 : K_1$ не будетъ стремиться къ 1, но тѣмъ не менѣе *возникаетъ новое затрудненіе*. Такое обстоятельство представляется, напримѣръ, для случая безконечно малаго пути $\xi\xi'$, разсмотрѣннаго въ n° 20. Этотъ путь $\xi\xi'$ можно консервативно деформировать, при чемъ ξ и ξ' останутся неподвижными. Этой деформаціей можно достигнуть того, чтобы точки ξ и ξ' сдѣлались подглавными и чтобы отношеніе $K_2 : K_1$ при новомъ опредѣленіи K_2 не стремилось къ 1. Но этотъ пріемъ въ данномъ случаѣ совершенно безполезенъ, ибо онъ только превращаетъ особый случай перваго рода въ случай безконечной близости другъ къ другу точекъ главной и

подглавной принадлежащій, какъ показано ниже (въ n^0 22), къ особымъ случаямъ *втораго* рода. Такой особый случай второго рода самъ требуетъ обратнаго приведенія къ особому случаю перваго рода, разсмотрѣнному въ n^0 20.

Если вообще особый случай перваго рода обладаетъ такимъ свойствомъ, что при разсмотрѣніи подглавныхъ точекъ и при соотвѣтствующемъ новомъ опредѣленіи *критичечкаго* значенія K_2 тѣмъ не менѣе либо отношеніе $K_2 : K_1$ остается стремящимся къ 1, либо особый случай перваго рода переходитъ въ особый случай второго рода, то при такихъ условіяхъ разсматриваемый случай будемъ называть *существенно* особымъ случаемъ перваго рода. Въ § 8 будутъ обнаружены полнѣе случаи этого рода.

§ 7. Особые случаи второго рода. Различный ихъ характеръ.

n^0 22. Изъ опредѣленія особыхъ случаевъ второго рода, которое дано было въ n^0 12, видно, что эти случаи, связанные съ вопросомъ о возможности для точекъ y кривой 0η разложенія (19), весьма разнообразны. Разсмотримъ отдѣльно нѣсколько группъ такихъ особыхъ случаевъ предполагая, что y и z связаны соотношеніемъ (17).

I. Есть случаи, когда функція

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy}$$

совершенно не способна разлагаться въ области точки $y = 0$ по формулѣ (19). Особые случаи при такомъ условіи требуютъ перемѣны самаго вида разложенія функціи $\Pi(y)$ и распространенія основного процесса вычисленія на такія видоизмѣненныя разложенія. Такъ, если ζ не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и если $f(z)$ представляется въ формѣ:

$$f(z) = (z-\zeta)^{\beta-1}\,\phi(z)\,\lg^n(z-\zeta), \tag{154}$$

гдѣ $\phi(z)$ есть функція голоморфная въ области точки $z = \zeta$ и не обращающаяся въ нуль при $z = \zeta$ и n есть цѣлое положительное число, то, въ случаѣ преобразованія перемѣннаго z

при помощи уравненія (17), функція $\Pi(y)$ представляется въ формѣ:

$$\Pi(y) = t^{\beta-1}\varphi_0(t) + t^{\beta-1}\varphi_1(t)\lg y + \ldots + t^{\beta-1}\varphi_n(t)\lg^n y, \quad (154')$$

гдѣ $t = y^{\frac{1}{\nu}}$ и $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ суть функціи голоморфныя въ области точки $t = 0$. При этихъ обстоятельствахъ функція $\Pi(y)$ разлагается по функціямъ вида: $y^{\alpha_k}\lg^s y$, такъ что можно для приближеннаго вычисленія интеграла $[\zeta\xi]$ предложить процессъ, который отличается отъ изложеннаго въ n^0 9 тѣмъ, что интегралы J_k вида (27) замѣняются интегралами вида:

$$J_{k,s} = \int\limits_{(0\eta)} e^{-my} y^{\alpha_k} \lg^s y \, dy. \quad (155)$$

Очевидно, интегралъ $J_{k,s}$ получается изъ упомянутаго интеграла J_k дифференцированіемъ его s разъ по параметру α_k.

II. Бываютъ случаи, когда вышеуказанная функція $\Pi(y)$ не имѣетъ особыхъ точекъ на протяженіи кривой 0η, кромѣ точки $y = 0$, и способна разлагаться по степенямъ y, но лишь въ области, крайне ограниченной, благодаря тому, что функція $\Pi(y)$ имѣетъ вблизи точки $y = 0$ особыя точки. Предположимъ для простоты, что функція $\Pi(y)$ имѣетъ только одну такую особую точку $y = y_1$, не лежащую на кривой 0η. При этихъ условіяхъ для устраненія затрудненій опять вообще приходится видоизмѣнить разложеніе функціи $\Pi(y)$. Такъ, если ζ не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и если функція $f(z)$ представляется въ формѣ:

$$f(z) = (z-\zeta)^{\beta-1}(z-z_1)^b \phi(z), \quad (156)$$

гдѣ b не есть цѣлое положительное число, z_1 есть точка, не лежащая на протяженіи звена $\zeta\xi$, но безконечно близкая къ ζ, $\phi(z)$ есть функція голоморфная въ областяхъ точекъ $z = \zeta$ и $z = z_1$, то, въ случаѣ преобразованія перемѣннаго z при помощи уравненія (17), можемъ функцію $\Pi(y)$ разложить по функціямъ вида:

$$y^{\alpha_k}(y-y_1)^b,$$

гдѣ y_1 есть безконечно малая величина, опредѣляемая такъ:

$$y_1 = \lg \frac{\psi(\zeta)}{\psi(z_1)} \,. \tag{156}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ приближенное вычисленіе интеграла $[\zeta\xi]$ сведется къ приближенному вычисленію интеграловъ вида:

$$J_k = \int\limits_{(0\gamma)} e^{-my}\; y^{\alpha_k}\; (y-y_1)^b\, dy. \tag{156''}$$

Этотъ сложный пріемъ можетъ быть избѣгнутъ въ томъ случаѣ, если точка $y = 0$ не есть особая точка функціи $\Pi(y)$ и если для вышеуказанной точки $z = z_1$ модуль $\psi(z_1)$ *болѣе* модуля $\psi(\zeta)$. При этихъ условіяхъ возможенъ слѣдующій порядокъ вычисленія интеграла $[\zeta\xi]$. Соединимъ точку z_1 съ точкой ζ прямою или кривою линіей $z_1\zeta$, для точекъ z которой наибольшее значеніе модуля $\psi(z)$ есть модуль $\psi(z_1)$, и присоединимъ эту линію $z_1\zeta$ весьма малой длины къ звену $\zeta\xi$. Затѣмъ разсмотримъ интегралъ $[z_1\zeta\xi]$, у котораго путь $z_1\zeta\xi$ интегрированія обладаетъ свойствами основного пути и состоитъ изъ единственнаго звена перваго рода съ главною точкою z_1, при чемъ точка ζ утратитъ значеніе главной и сдѣлается простою точкой. Вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть:

$$[\zeta\xi] = [z_1\zeta\xi] - [z_1\zeta]\,, \tag{156'''}$$

гдѣ интегралы $[z_1\zeta\xi]$ и $[z_1\zeta]$ вычисляются при помощи формулъ, данныхъ въ предшествующихъ параграфахъ, при чемъ интегралъ $[z_1\zeta]$, отнесенный къ пути $z_1\zeta$ безконечно малой длины, вычисляется по формуламъ, даннымъ въ n^0 20.

III. Иногда особый случай второго рода проистекаетъ отъ безконечной близости двухъ послѣдовательныхъ главныхъ или подглавныхъ (см. n^0 21) точекъ ζ и ζ' другъ къ другу. Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ условіи по крайней мѣрѣ одна изъ упомянутыхъ точекъ (пусть она есть ζ) будетъ такова, что для

нея вышеуказанная функція $\Pi(y)$ будетъ имѣть особую точку y', опредѣляемую уравненіемъ:

$$y' = \lg \frac{\psi(\zeta)}{\psi(\zeta')} \qquad (157)$$

и безконечно близкую къ точкѣ $y = 0$. При безконечной близости двухъ главныхъ или подглавныхъ точекъ ζ и ζ' возможенъ слѣдующій пріемъ. Предположимъ, что консервативной деформаціей части $\zeta\zeta'$ основного пути ABC можно достигнуть того, чтобы эквивалентный путь $\zeta\xi\zeta'$ имѣлъ *безконечно малую* длину. Точка ξ подраздѣлитъ кривую $\zeta\xi\zeta'$ на двѣ части $\zeta\xi$ и $\xi\zeta'$, также имѣющія весьма малую длину, при чемъ вычисленіе интеграла $[\zeta\zeta']$ будетъ приведено къ вычисленію интеграловъ $[\zeta\xi]$ и $[\zeta'\xi]$. Къ этимъ послѣднимъ интеграламъ можно затѣмъ примѣнить пріемы, изложенные въ n^0 20, если точка ξ избрана подъ условіями:

$$|\psi(\xi)| < |\psi(\zeta)| \text{ и } |\psi(\xi)| < \psi(\zeta'). \qquad (158)$$

IV. Можетъ случиться, что главная точка ζ основного пути ABC есть особая точка функціи $\psi(z)$. Такъ какъ модуль $\psi(\zeta)$ при этомъ представляется конечною величиною K_1, то для этой особой точки функція $\psi(z)$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. Если эта особая точка *алгебраическаго* характера, т. е. функція $\psi(z)$ въ области этой точки разлагается такъ:

$$\psi(z) = a_0 + a_1 (z-\zeta)^{\frac{1}{n}} + \ldots + a_k (z-\zeta)^{\frac{k}{n}} + \ldots,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число, то преобразованіе перемѣннаго z при помощи уравненія:

$$z - \zeta = w^n$$

приведетъ задачу къ обыкновенному случаю, такъ какъ точка $w = 0$ не будетъ особою точкою функціи

$$\Psi(w) = \psi(\zeta + w^n).$$

Но если особая точка ζ функціи $\psi(z)$ не алгебраическаго характера, то опять придется изыскивать другую форму разложенія функціи $\Pi(y)$ и съ нею поступать такъ, какъ пояснено выше (см. пункт. I).

Замѣтимъ, что при разслѣдованіи особыхъ случаевъ второго рода можемъ также пользоваться вмѣсто уравненія (17) любымъ изъ уравненій (109), (110) и (111).

§ 8. **Модулярная поверхность. Деформація, опредѣляющая основной путь, ортогональный къ линіямъ уровня этой поверхности. Главныя и подглавныя точки ортогональнаго основного пути и его количественные элементы K_1 и K_2. Нормальное значеніе величины K_2; нормальныя точки и существенно особые случаи перваго рода. Нормальныя звенья перваго и второго рода. Дополнительная деформація ортогональнаго основного пути. О длинѣ и другихъ свойствахъ линій $0\eta'$ и $\eta\eta'$, соотвѣтствующихъ полному звену $\zeta\xi'$ и его второстепенной части $\xi\xi'$ для случая ортогональнаго основного пути. Характеръ главныхъ, подглавныхъ и нормальныхъ точекъ основного пути и признаки, ихъ опредѣляющіе. Неортогональные основные пути интегрированія.**

n^0 23. Всѣ предшествующіе выводы получены въ предположеніи, что возможно построить основной путь ABC, эквивалентный данному пути abc и удовлетворяющій извѣстнымъ условіямъ. Поэтому упомянутые выводы получатъ окончательную прочность лишь при оправданіи всѣхъ этихъ предположеній построеніемъ удовлетворяющаго имъ основного пути ABC. Эта цѣль будетъ достигнута въ настоящемъ параграфѣ.

Ниже будемъ предполагать, что функція $\psi(z)$ есть любая алгебрическая или такая трансцедентная, которая подобна алгебрической, т. е. имѣетъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго z отдѣльныя особыя точки, свойственныя алгебраическимъ функціямъ, а при всѣхъ остальныхъ конечныхъ значеніяхъ z конечна и непрерывна. Для всѣхъ безконечныхъ значеній

z пусть модуль $\psi(z)$ обращается либо въ нуль, либо въ безконечность.

Для простоты, ограничимъ еще функцію $\psi(z)$ предположеніемъ, что ея модуль R есть *однозначная* функція перемѣннаго z.

Изъ предшествующаго видно, что изслѣдованіе измѣненій функціи $\psi(z)$ и ея модуля имѣетъ важное значеніе въ задачѣ о приближенномъ вычисленіи интеграла:

$$[abc] = \int_{(abc)} f(z)\, \psi^m(z)\, dz. \qquad (159)$$

Эти измѣненія принимаются въ соображеніе при консервативной деформаціи пути интегрированія, указанной въ §§ 2 (n^0 2), 3 (nn^0 3—6) и 6 (n^0 21) и служащей для опредѣленія *хорошо направленнаго* основного пути ABC, а также его количественныхъ элементовъ K_1 и K_2, вліяющихъ на быстроту убыванія нѣкоторыхъ членовъ погрѣшности приближеннаго выраженія интеграла $[abc]$.

При выполненіи указанной въ §§ 2, 3 и 6 деформаціи приходится перемѣщать гибкую нить, изображающую путь интеграціи, съ такимъ расчетомъ, чтобы, по возможности, понижать maximum'ы и minimum'ы модуля R функціи $\psi(z)$, соотвѣтствующіе этому пути. Въ видахъ болѣе успѣшнаго достиженія этой цѣли полезно изучить измѣненія модуля R при посредствѣ *модулярной поверхности*, опредѣляемой уравненіемъ:

$$R = |\psi(z)|\,, \qquad (160)$$

при чемъ точки этой поверхности опредѣляются слѣдующими построеніями. Къ плоскости комплекснаго перемѣннаго въ ея точкѣ z возстановимъ перпендикуляръ въ данномъ *положительномъ* направленіи и на этомъ перпендикулярѣ возьмемъ точку M, отстоящую отъ z на длину $R = |\psi(z)|$. Эта точка M считается принадлежащею разсматриваемой модулярной поверхности. Ниже эту точку M модулярной поверхности будемъ

обозначать тою же буквою z, какъ и соотвѣтствующую точку z плоскости комплекснаго перемѣннаго [1]).

n^0 24. Путь интеграціи можетъ быть теперь изображенъ кривою abc, которая лежитъ на модулярной поверхности. Консервативную деформацію этого пути будемъ наглядно представлять тѣми же средствами, какъ это сдѣлано для пути, изображеннаго кривою abc на плоскости комплекснаго перемѣннаго z. Такимъ образомъ, кривую abc, взятую на модулярной поверхности, мы будемъ принимать также за гибкую, растяжимую и сжимаемую нить, способную перемѣщаться по этой поверхности свободно, встрѣчая задержку лишь въ особыхъ точкахъ функціи $f(z)\,\psi^m(z)$. Въ этихъ точкахъ модулярной поверхности пусть укрѣплены безконечно тонкія твердыя иглы, производящія эту задержку. Точки a и c кривой abc, лежащей на модулярной поверхности, будемъ считать неподвижными, кромѣ того случая, когда кривая abc замкнутая ($a=c$) и притомъ, когда функція $f(z)\,\psi^m(z)$ при обходѣ точкою z кривой abc сохраняетъ одно и то же значеніе какъ при выходѣ z изъ любой ея точки z_1, такъ и при возвращеніи z въ ту же точку z_1 послѣ обхода.

Воспользуемся еще однимъ представленіемъ, которое обнаруживаетъ особенную выгоду употребленія модулярной поверхности, дѣлающей простымъ и нагляднымъ изысканіе основного пути интегрированія. Вообразимъ, что гибкая нить abc, обладая вышеуказанными свойствами, въ то же время оказывается *тяжелою*, при чемъ сила тяжести пусть направлена перпендикулярно къ плоскости комплекснаго перемѣннаго z. При этомъ

---

[1]) Свойства модулярныхъ поверхностей подробно разсматриваются въ главѣ III моей диссертаціи: „*Рядъ Лагранжа*" для случая, когда $\psi(z)$ имѣетъ видъ: $\sqrt[n]{\varphi(z)}$, гдѣ $\varphi(z)$ есть однозначная функція. Изъ этой главы мы заимствуемъ многое, необходимое для настоящей нашей задачи. Если бы функція $\psi(z)$ имѣла другой видъ, т. е. если бы модуль ея былъ многозначною функціею $\psi(z)$, то форма модулярной поверхности осложнилась бы. Такіе случаи пришлось бы связать съ поверхностью Римана.

условіи части нити *abc*, свободныя отъ задержекъ, будутъ *сползать внизъ* подъ дѣйствіемъ собственной тяжести. Встрѣтивъ при этомъ сползаніи ту или другую иглу, нить за нее цѣпляется, при чемъ соотвѣтствующія части нити будутъ поддерживаться иглою, какъ подвѣшенныя на нее. Пусть части нити, спустившіяся до горизонтальной плоскости L, проведенной на данномъ маломъ разстояніи R_0 отъ плоскости комплекснаго перемѣннаго z, не могутъ сползать ниже плоскости L, но ложатся на нее. Эта плоскость L пусть проведена такъ, что нить *abc* въ первоначальномъ положеніи не имѣетъ точекъ, лежащихъ ниже уровня этой плоскости.

Будемъ воображать, что разсматриваемое сползаніе происходитъ подъ вліяніемъ не одной только тяжести, но тому же сползанію пусть помогаютъ руки, подвергающія, между прочимъ, нѣкоторые элементы нити, о которыхъ рѣчь будетъ ниже, особымъ растяженіямъ и безконечно малымъ добавочнымъ перемѣщеніямъ.

Вышеуказанное сползаніе нити *abc* можетъ быть осуществляемо различными способами; но, имѣя въ виду получить *ортогональный* основной путь (см. n^0 4), *которому принадлежитъ наилучшее изъ хорошихъ направленій*, подчинимъ это движеніе одному частному условію, устанавливающему соотвѣтствіе между элементами деформируемаго пути въ его первоначальномъ положеніи *abc* и въ окончательномъ положеніи $a'b'c'$. Съ цѣлію установить такое соотвѣтствіе, допустимъ, что сползающая нить можетъ перемѣщаться лишь подъ условіемъ, *чтобы каждая ея точка, пока она не встрѣтитъ особаго препятствія, двигалась внизъ по линіи, ортогональной къ линіямъ уровня модулярной поверхности, т. е. къ сѣченіямъ этой поверхности горизонтальными плоскостями* [1]). Назовемъ такое движеніе

---

[1]) О линіяхъ уровня модулярной поверхности и объ ортогональныхъ къ нимъ линіяхъ см. въ статьѣ: „*Рядъ Лагранжа*“, гл. III, §§ 10, 11 и 12.

нити *сползаніемъ по ортогональнымъ направленіямъ* или *ортогональнымъ сползаніемъ*.

Напомнимъ здѣсь, что упомянутая ортогональная линія опредѣляется уравненіемъ:

$$W = const., \tag{161}$$

гдѣ W есть амплитуда функціи $\psi(z)$.

При сползаніи нити по ортогональнымъ направленіямъ, всѣ ея элементы, кромѣ особенныхъ, о которыхъ сейчасъ будемъ говорить, будутъ стремиться занять въ концѣ этого движенія положеніе на линіи уровня, лежащей въ плоскости L, при чемъ первоначальное и окончательное положенія каждой точки z сползающей нити будутъ началомъ и концомъ той ортогональной вѣтви, которую описываетъ эта точка при разсматриваемомъ движеніи, *такъ что для того и другого положенія амплитуда функціи $\psi(z)$ будетъ одна и та же.*

Такимъ образомъ, устанавливается соотвѣтствіе между точками эквивалентныхъ путей abc и $a'b'c'$, кромѣ точекъ *особенныхъ* элементовъ деформируемаго пути abc. Эти особенные элементы ортогонально сползающей нити суть тѣ, кои при вышеуказанномъ сползаніи ея встрѣчаютъ особыя препятствія. Такіе особенные элементы нити могутъ представиться въ *трехъ* случаяхъ: 1) когда безконечно малый элементъ нити, сползая, встрѣчаетъ своею промежуточною точкою z одну изъ вышеупомянутыхъ *твердыхъ иглъ*, 2) когда промежуточная точка z, принадлежащая безконечно малому сползающему элементу нити и, по условію, движущаяся по ортогональной линіи, встрѣчаетъ *кратную* точку ζ этой линіи, т. е. точку въ которой эта ортогональная линія *развѣтвляется*, 3) когда безконечно малый элементъ нити содержитъ какую либо изъ точекъ, которыя при разсматриваемомъ сползаніи нити должны оставаться *неподвижными*.

Разсмотримъ отдѣльно въ этихъ случаяхъ деформацію указанныхъ особыхъ элементовъ нити, состоящую вообще въ

томъ, что особый элементъ, встрѣтившій препятствіе, подвергается при дальнѣйшемъ движеніи *особому растяженію*, превращающему его изъ безконечно малой дуги въ кривую конечной длины, состоящую изъ вѣтвей ортогональныхъ линій. При этомъ будемъ представлять себѣ предѣльный случай, когда всѣ замкнутыя кривыя, по которымъ пересѣкаются поверхности иглъ съ модулярною поверхностью, обратились въ точки, при чемъ и петли превращаются въ точки. Послѣ построенія пути $a'b'c'$, соотвѣтствующаго этому предѣльному случаю, можемъ, утолщая иглы, расширить и, такимъ образомъ, возстановить исчезнувшія петли.

I. Пусть $\mathfrak{z}$ есть особая точка функціи $f(z)\psi^m(z)$ и въ ней укрѣплена безконечно тонкая игла Z. Пусть безконечно малый элементъ $z_1 z_2$ ортогонально сползающей нити abc встрѣчаетъ при своемъ движеніи эту иглу. Очевидно, элементъ $z_1 z_2$ нити долженъ имѣть на своемъ протяженіи между крайними точками z_1 и z_2 такую *промежуточную* точку z, которая движется по ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$, проходящей чрезъ точку $\mathfrak{z}$. Признакъ ея тотъ, что амплитуда функціи $\psi(z)$ совпадаетъ съ амплитудою величины $\psi(\mathfrak{z})$. Послѣ встрѣчи элемента $z_1 z_2$ съ иглою Z, этотъ элементъ, при дальнѣйшемъ сползаніи нити, зацѣпившись за иглу, пусть вытягивается. Чтобы представить себѣ элементъ $z_1 z_2$ нити abc послѣ растяженія, вообразимъ прежде всего точки z_1 и z_2 и промежуточную точку z въ ихъ *первоначальномъ* положеніи (когда элементъ $z_1 z_2$ лежалъ выше уровня точки $\mathfrak{z}$) и ортогональныя линіи N_{z_1} и N_{z_2}, проходящія чрезъ точки z_1 и z_2, и представимъ себѣ вѣтви $z_1 z'_1$ и $z_2 z'_2$ этихъ ортогональныхъ линій, нисходящія отъ точекъ z_1 и z_2 до соотвѣтственныхъ точекъ z'_1 и z'_2, лежащихъ въ уровнѣ L. Найдемъ затѣмъ *предѣльныя* положенія вѣтвей $z_1 z'_1$ и $z_2 z'_2$, когда точки z_1 и z_2 сливаются съ промежуточной точкой z, лежащей на линіи $N_{\mathfrak{z}}$. Эти предѣльныя положенія представятъ собою *опредѣленныя* вѣтви $z\xi'$ и $z\xi''$ ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$, при чемъ точка z лежитъ выше уровня точки $\mathfrak{z}$, а точки

ξ' и ξ'' помѣщаются въ уровнѣ L. Если отъ каждой изъ этихъ вѣтвей отнимемъ общую часть $z\mathfrak{z}$, то получатся также опредѣленныя вѣтви $\mathfrak{z}\xi'$ и $\mathfrak{z}\xi''$ ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$. *Эти вѣтви должны войти въ составъ искомаго пути $a'b'c'$, образуя вмѣстѣ его часть $\xi'\mathfrak{z}\xi''$, полученную въ результатѣ растяженія элемента $z\,z_2$, который до растяженія былъ безконечно малъ и въ предѣлѣ представлялъ собою точку z пересѣченія кривой $N_{\mathfrak{z}}$ съ первоначальнымъ положеніемъ нити abc.* При этомъ нужно воображать, что найденная часть $\xi'\mathfrak{z}\xi''$ имѣетъ *петлю*, обратившуюся въ точку $\mathfrak{z}$. Чтобы возстановить эту исчезающую петлю, вообразимъ, что игла Z утолщается, растягивая петлю. Пусть послѣ утолщенія иглы пересѣченіе ея съ модулярною поверхностью представляется безконечно малою замкнутою кривою $pqrp$. Пусть вышеуказанныя вѣтви $\mathfrak{z}\xi'$ и $\mathfrak{z}\xi''$ ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$ пересѣкаются съ кривою $pqrp$ въ точкахъ z' и z''. Исчезнувшая петля $\mathfrak{z}$, по возстановленіи ея, представится *опредѣленною* дугою $z'z''$ кривой $pqrp$, при чемъ въ составъ пути $a'b'c'$ войдетъ вмѣсто $\xi'\mathfrak{z}\xi''$ кривая $\xi'z'z''\xi''$, слагающаяся изъ восходящей ортогональной вѣтви $\xi'z'$, петли $z'z''$ и нисходящей ортогональной вѣтви $z''\xi''$. Строеніе кривой $\xi'z'z''\xi''$ для случая, когда $\mathfrak{z}$ есть главная точка ζ, изображено на фигурахъ 2 и 3 (см. n^0 28).

II. Пусть $\mathfrak{z}$ есть кратная точка линіи $N_{\mathfrak{z}}$, ортогональной къ линіямъ уровня. Такая линія, развѣтвляясь въ точкѣ $\mathfrak{z}$, имѣетъ ν *нисходящихъ* отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныхъ вѣтвей ($\nu \geqq 2$), при чемъ точка $\mathfrak{z}$, какъ извѣстно, характеризуется тѣмъ, что для нея имѣетъ силу уравненіе [1]):

$$\psi'(\mathfrak{z}) = 0. \qquad (161')$$

Пусть безконечно малый элементъ $z_1 z_2$ ортогонально сползающей нити, пересѣкающійся съ линіей $N_{\mathfrak{z}}$, достигъ своею *про-*

---

[1]) См. „*Рядъ Лагранжа*“, гл. III, §§ 7 и 12.

межуточною точкою z, лежащею на ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$, точки $\mathfrak{z}$. При дальнѣйшей деформаціи элемента $z_1 z_2$ разсматриваемой сползающей нити онъ долженъ вытягиваться, такъ какъ въ дальнѣйшемъ движеніи его точки z_1 и z_2, спускаясь по ортогональнымъ путямъ, должны пойти по двумъ *различнымъ* направленіямъ. Чтобы представить себѣ безконечно малый элементъ $z_1 z_2$ послѣ растяженія его въ линію конечной длины, вообразимъ прежде всего точки z_1 и z_2 и промежуточную точку z въ ихъ *первоначальномъ* положеніи (когда весь элементъ $z_1 z_2$ лежитъ выше уровня точки $\mathfrak{z}$) и ортогональныя линіи N_{z_1} и N_{z_2}, проходящія чрезъ точки z_1 и z_2, и представимъ себѣ вѣтви $z_1 z'_1$ и $z_2 z'_2$ этихъ ортогональныхъ линій, нисходящія отъ указанныхъ точекъ z_1 и z_2 до соотвѣтственныхъ точекъ z'_1 и z'_2, лежащихъ въ уровнѣ L. Найдемъ затѣмъ *предѣльныя* положенія вѣтвей $z_1 z'_1$ и $z_2 z'_2$, когда точки z_1 и z_2 сливаются съ промежуточной точкой z элемента $z_1 z_2$, лежащей на линіи $N_{\mathfrak{z}}$. Эти предѣльныя положенія представятъ собою *опредѣленныя* нисходящія вѣтви $z\xi'$ и $z\xi''$ ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$, при чемъ точка z лежитъ выше уровня точки $\mathfrak{z}$, а точки ξ' и ξ'' помѣщаются въ уровнѣ L. Если отъ каждой изъ вѣтвей $z\xi'$ и $z\xi''$ отнимемъ общую часть $z\mathfrak{z}$, то получатся въ остаткѣ также двѣ *опредѣленныя* вѣтви ортогональной линіи $N_{\mathfrak{z}}$, нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$. *Эти двѣ вѣтви и должны войти въ составъ искомаго пути $a'b'c'$, образуя вмѣстѣ его часть $\xi'\mathfrak{z}\,\xi''$, полученную въ результатѣ растяженія элемента $z_1 z_2$, который до растяженія былъ безконечно малъ и въ предѣлѣ представлялъ собою точку z пересѣченія кривой $N_{\mathfrak{z}}$ съ первоначальнымъ положеніемъ нити abc.* Изъ болѣе внимательнаго изученія направленій ортогональныхъ вѣтвей, идущихъ отъ точки $\mathfrak{z}$, слѣдуетъ, что вѣтви $\mathfrak{z}\xi'$ и $\mathfrak{z}\xi''$ образуютъ при вершинѣ $\mathfrak{z}$ уголъ, равный $\frac{2\pi}{\nu}$, при чемъ вышеуказанная ортогональная вѣтвь $z\mathfrak{z}$ дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ. Доказательства этихъ замѣчаній имѣются въ главѣ III статьи «Рядъ Лагранжа».

Но если особая точка ζ функціи $\psi(z)$ не алгебраическаго характера, то опять придется изыскивать другую форму разложенія функціи $\Pi(y)$ и съ нею поступать такъ, какъ пояснено выше (см. пункт. I).

Замѣтимъ, что при разслѣдованіи особыхъ случаевъ второго рода можемъ также пользоваться вмѣсто уравненія (17) любымъ изъ уравненій (109), (110) и (111).

§ 8. **Модулярная поверхность. Деформація, опредѣляющая основной путь, ортогональный къ линіямъ уровня этой поверхности. Главныя и подглавныя точки ортогональнаго основного пути и его количественные элементы K_1 и K_2. Нормальное значеніе величины K_2; нормальныя точки и существенно особые случаи перваго рода. Нормальныя звенья перваго и второго рода. Дополнительная деформація ортогональнаго основного пути. О длинѣ и другихъ свойствахъ линій $O\eta'$ и $\eta\eta'$, соотвѣтствующихъ полному звену $\zeta\xi'$ и его второстепенной части $\xi\xi'$ для случая ортогональнаго основного пути. Характеръ главныхъ, подглавныхъ и нормальныхъ точекъ основного пути и признаки, ихъ опредѣляющіе. Неортогональные основные пути интегрированія.**

n^0 23. Всѣ предшествующіе выводы получены въ предположеніи, что возможно построить основной путь ABC, эквивалентный данному пути abc и удовлетворяющій извѣстнымъ условіямъ. Поэтому упомянутые выводы получатъ окончательную прочность лишь при оправданіи всѣхъ этихъ предположеній построеніемъ удовлетворяющаго имъ основного пути ABC. Эта цѣль будетъ достигнута въ настоящемъ параграфѣ.

Ниже будемъ предполагать, что функція $\psi(z)$ есть любая алгебрическая или такая трансцедентная, которая подобна алгебрической, т. е. имѣетъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго z отдѣльныя особыя точки, свойственныя алгебраическимъ функціямъ, а при всѣхъ остальныхъ конечныхъ значеніяхъ z конечна и непрерывна. Для всѣхъ безконечныхъ значеній

z пусть модуль $\psi(z)$ обращается либо въ нуль, либо въ безконечность.

Для простоты, ограничимъ еще функцію $\psi(z)$ предположеніемъ, что ея модуль R есть *однозначная* функція перемѣннаго z.

Изъ предшествующаго видно, что изслѣдованіе измѣненій функціи $\psi(z)$ и ея модуля имѣетъ важное значеніе въ задачѣ о приближенномъ вычисленіи интеграла:

$$[abc] = \int_{(abc)} f(z)\, \psi^m(z)\, dz. \qquad (159)$$

Эти измѣненія принимаются въ соображеніе при консервативной деформаціи пути интегрированія, указанной въ §§ 2 (n^0 2), 3 (nn^0 3—6) и 6 (n^0 21) и служащей для опредѣленія *хорошо направленнаго* основного пути ABC, а также его количественныхъ элементовъ K_1 и K_2, вліяющихъ на быстроту убыванія нѣкоторыхъ членовъ погрѣшности приближеннаго выраженія интеграла $[abc]$.

При выполненіи указанной въ §§ 2, 3 и 6 деформаціи приходится перемѣщать гибкую нить, изображающую путь интеграціи, съ такимъ расчетомъ, чтобы, по возможности, понижать maximum'ы и minimum'ы модуля R функціи $\psi(z)$, соотвѣтствующіе этому пути. Въ видахъ болѣе успѣшнаго достиженія этой цѣли полезно изучить измѣненія модуля R при посредствѣ *модулярной поверхности*, опредѣляемой уравненіемъ:

$$R = |\, \psi(z)\, |, \qquad (160)$$

при чемъ точки этой поверхности опредѣляются слѣдующими построеніями. Къ плоскости комплекснаго перемѣннаго въ ея точкѣ z возстановимъ перпендикуляръ въ данномъ *положительномъ* направленіи и на этомъ перпендикулярѣ возьмемъ точку M, отстоящую отъ z на длину $R = |\psi(z)|$. Эта точка M считается принадлежащею разсматриваемой модулярной поверхности. Ниже эту точку M модулярной поверхности будемъ

обозначать тою же буквою z, какъ и соотвѣтствующую точку z плоскости комплекснаго перемѣннаго [1]).

n^0 24. Путь интеграціи можетъ быть теперь изображенъ кривою abc, которая лежитъ на модулярной поверхности. Консервативную деформацію этого пути будемъ наглядно представлять тѣми же средствами, какъ это сдѣлано для пути, изображеннаго кривою abc на плоскости комплекснаго перемѣннаго z. Такимъ образомъ, кривую abc, взятую на модулярной поверхности, мы будемъ принимать также за гибкую, растяжимую и сжимаемую нить, способную перемѣщаться по этой поверхности свободно, встрѣчая задержку лишь въ особыхъ точкахъ функціи $f(z)\,\psi^m(z)$. Въ этихъ точкахъ модулярной поверхности пусть укрѣплены безконечно тонкія твердыя иглы, производящія эту задержку. Точки a и c кривой abc, лежащей на модулярной поверхности, будемъ считать неподвижными, кромѣ того случая, когда кривая abc замкнутая ($a=c$) и притомъ, когда функція $f(z)\,\psi^m(z)$ при обходѣ точкою z кривой abc сохраняетъ одно и то же значеніе какъ при выходѣ z изъ любой ея точки z_1, такъ и при возвращеніи z въ ту же точку z_1 послѣ обхода.

Воспользуемся еще однимъ представленіемъ, которое обнаруживаетъ особенную выгоду употребленія модулярной поверхности, дѣлающей простымъ и нагляднымъ изысканіе основного пути интегрированія. Вообразимъ, что гибкая нить abc, обладая вышеуказанными свойствами, въ то же время оказывается *тяжелою*, при чемъ сила тяжести пусть направлена перпендикулярно къ плоскости комплекснаго перемѣннаго z. При этомъ

---

[1]) Свойства модулярныхъ поверхностей подробно разсматриваются въ главѣ III моей диссертаціи: „*Рядъ Лагранжа*“ для случая, когда $\psi(z)$ имѣетъ видъ: $\sqrt[n]{\varphi(z)}$, гдѣ $\varphi(z)$ есть однозначная функція. Изъ этой главы мы заимствуемъ многое, необходимое для настоящей нашей задачи. Если бы функція $\psi(z)$ имѣла другой видъ, т. е. если бы модуль ея былъ многозначною функціею $\psi(z)$, то форма модулярной поверхности осложнилась бы. Такіе случаи пришлось бы связать съ поверхностью Римана.

ортогональныхъ линій, т. е. съ точками кривой, для которыхъ $\psi'(z) = 0$, и 3) съ точками $A = a$ и $C = c$, если точки a и c первоначальнаго пути abc должны были оставаться неподвижными при консервативной деформаціи.

Отыскавъ точки, соотвѣтствующія всѣмъ maximum'амъ модуля R функціи $\psi(z)$ при измѣненіи z по пути ABC, и руководясь опредѣленіями, указанными въ *nn*° 3 и 21, можемъ отличить тѣ изъ найденныхъ точекъ, кои удовлетворяютъ условіямъ, характеризующимъ главныя и подглавныя точки основного пути ABC.

Изъ этихъ условій существенными для *главныхъ* точекъ являются условія, чтобы maximum'ы модуля R функціи $\psi(z)$, соотвѣтствующіе главнымъ точкамъ, совпадали съ maximum maximorum этого модуля, чтобы эти maximum'ы нельзя было *понизить* дальнѣйшей консервативной деформаціей пути ABC и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя было уменьшить число этихъ maximum'овъ. Точки найденнаго пути ABC, соотвѣтствующія maximum maximorum модуля R, удовлетворяютъ всѣмъ этимъ требованіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, случайные maximum'ы, совпадающіе съ maximum maximorum модуля R (см. *n*° 3), кои могли образоваться при разсмотрѣнной выше деформаціи пути abc, устранены взаимнымъ сокращеніемъ всѣхъ *лишнихъ* вѣтвей при вышеуказанномъ переходѣ отъ пути $a'b'c'$ къ пути ABC. Остальные maximum'ы, совпадающіе съ maximum maximorum модуля R функціи $\psi(z)$, не могутъ быть понижены частію вслѣдствіе невозможности перескакивать чрезъ особыя точки интегрируемой функціи, въ которыхъ укрѣплены иглы, частію по причинѣ особенностей въ строеніи модулярной поверхности вблизи точекъ, изображающихъ корни уравненія: $\psi'(z) = 0$, хотя бы эти точки не были особыми и не имѣли иглъ. Эти особенности подробно разъяснены въ главѣ III статьи «*Рядъ Лагранжа*». Напомнимъ здѣсь поэтому поводу, что модулярная поверхность имѣетъ области, соотвѣтствующія нулямъ функціи $\psi(z)$ и называемыя *углубленіями*, при чемъ

переходы изъ одного углубленія въ другое совершаются путями, идущими чрезъ болѣе возвышенныя части модулярной поверхности. Высшія точки такихъ переходовъ назовемъ *точками перевала*. Каждая точка перевала можетъ, при деформаціи переходовъ, занять *низшее* положеніе лишь тогда, когда она совпадетъ съ соотвѣтствующимъ корнемъ уравненія: $\psi'(z)=0$. Вѣтвь $\xi'\zeta\xi''$ основного пути ABC, по которой совершается переходъ чрезъ такой корень ζ, соотвѣтствующій maximum'у модуля R, подобна указанному переходу, ведущему изъ области одного углубленія въ другое, при чемъ понизить точку перевала ζ, т. е. указанный maximum, уже невозможно.

Найдя главныя точки, будемъ имѣть величину K_1, какъ модуль функціи $\psi(z)$ для каждой главной точки.

Подглавныя точки, стремящіяся при данномъ измѣненіи параметровъ сдѣлаться главными, должны обладать всѣми свойствами главныхъ въ предѣлѣ и въ этомъ предѣльномъ положеніи должны представлять такой maximum maximorum, который нельзя понизить деформаціями. Но уже до перехода къ предѣлу онѣ должны обладать свойствами maximum'овъ. Тѣ изъ найденныхъ выше maximum'овъ модуля R функціи $\psi(z)$, кои представляютъ значенія R, меньшія K_1, но весьма близкія къ K_1, соотвѣтствуютъ подглавнымъ точкамъ. Эти точки не могутъ быть устранены съ ортогональнаго основного пути и даже съ пути неортогональнаго, но хорошо направленнаго; неортогональный основной путь могъ бы пройти мимо подглавныхъ точекъ, *лишь теряя при этомъ хорошее направленіе*.

Теперь можно считать доказаннымъ, что главныя и подглавныя точки ортогональнаго основного пути ABC выбираются изъ числа точекъ (162), устраняя изъ нихъ тѣ, кои не принадлежатъ кривой ABC въ предѣлѣ, считая ея петли превратившимися въ особыя точки функціи $f(z)\,\psi'''(z)$, и тѣ, для которыхъ модуль $\psi(z)$ менѣе величины K_1 и не весьма близокъ къ K_1.

Подробнѣе о выборѣ главныхъ и подглавныхъ точекъ основного пути ABC изъ группы точекъ (162) будетъ рѣчь въ n^0 26.

Переходя къ опредѣленію величины K_2, мы должны принять въ расчетъ опять всѣ вышеупомянутые maximum'ы модуля R функціи $\psi(z)$ для точекъ z кривой ABC. Затѣмъ мы должны принять во вниманіе значенія модуля R функціи $\psi(z)$, соотвѣтствующія его minimum'амъ для точекъ z пути ABC. Эти minimum'ы могутъ соотвѣтствовать, во-первыхъ, точкамъ этого пути, лежащимъ въ уровнѣ L, и, вовторыхъ, петлямъ, образуемымъ кривою ABC около иглъ, а также точкамъ, лежащимъ на ортогональныхъ вѣтвяхъ кривой ABC, при чемъ эти послѣднія точки, какъ легко доказать [1]), суть кратныя точки соотвѣтствующихъ ортогональныхъ линій, т. е. удовлетворяютъ уравненію: $\psi'(z) = 0$. Кромѣ всѣхъ указанныхъ сейчасъ значеній модуля R, при отысканіи величины K_2 слѣдуетъ еще принять во вниманіе значенія этого модуля, соотвѣтствующія всѣмъ вообще лежащимъ на кривой ABC корнямъ уравненія $\psi'(z) = 0$ и особымъ точкамъ (исчезающимъ петлямъ) интегрируемой функціи, хотя бы эти корни и особыя точки (петли) не соотвѣтствовали ни maximum'амъ, ни minimum'амъ модуля R функціи $\psi(z)$. Изъ всѣхъ принятыхъ такимъ образомъ во вниманіе значеній модуля R исключаются тѣ, кои соотвѣтствуютъ главнымъ и подглавнымъ точкамъ, а изъ остальныхъ разсматриваемыхъ значеній избирается *наибольшее*, которое и представитъ искомую величину K_2.

Разсмотримъ затѣмъ нѣкоторыя свойства этой величины K_2 и установимъ понятіе о *нормальномъ* значеніи этой величины.

Иногда величина K_2, соотвѣтствующая ортогональному основному пути ABC, зависитъ отъ положенія вышеуказанной горизонтальной плоскости L, въ которой лежатъ нѣкоторыя вѣтви кривой ABC и уровень R_0 которой можно понижать до нуля. Зависимость K_2 отъ высоты R_0 уровня L имѣетъ мѣсто тогда, когда величина K_2, опредѣляемая по вышеуказаннымъ правиламъ, какъ значеніе модуля R функціи $\psi(z)$, соотвѣтствуетъ

---

[1]) См. „*Рядъ Лагранжа*", гл. III, § 12

точкѣ z кривой ABC, лежащей въ плоскости уровня L. При этомъ условіи будемъ имѣть: $K_2 = R_0$ и притомъ K_2 будетъ уменьшаться съ убываніемъ R_0. Такое уменьшеніе иногда можно вести до нуля, иногда же K_2 убываетъ лишь до нѣкотораго minimum'а, не достигающаго нуля, а затѣмъ перестаетъ измѣняться съ дальнѣйшимъ убываніемъ R_0, такъ что послѣ такого убыванія будетъ имѣть силу неравенство: $R_0 < K_2$. Вообще при условіи $R_0 < K_2$, будемъ называть количество K_2 *нормальнымъ значеніемъ* величины K_2.

Нормальное значеніе величины K_2 вообще не слѣдуетъ смѣшивать съ его критическимъ значеніемъ, о которомъ даны понятія въ n^0 4 (при основномъ опредѣленіи главныхъ точекъ) и въ n^0 21 (при расширенномъ опредѣленіи главныхъ точекъ) и которое во множествѣ случаевъ не совпадаетъ съ нормальнымъ. Однако, нормальное значеніе K_2 можно считать критическимъ въ особомъ болѣе узкомъ смыслѣ, если уголъ α, играющій роль при опредѣленіи хорошаго направленія основного пути (см. n^0 4), считать *прямымъ*. При этомъ хорошее направленіе будетъ принадлежать исключительно ортогональнымъ вѣтвямъ, и даже исчезающія петли, лежащія ниже главныхъ и подглавныхъ точекъ, должны считаться нарушающими это хорошее направленіе. Но если, расширяя указанное узкое понятіе о хорошемъ направленіи, будемъ считать вышеупомянутый уголъ α острымъ, а не прямымъ, то нормальное значеніе K_2 можетъ иногда оказаться *болѣе* критическаго значенія K_2.

Назовемъ *нормальными* точками тѣ изъ точекъ, кои лежатъ на разсматриваемомъ ортогональномъ пути ABC при условіи $R_0 < K_2$ и для которыхъ модуль R функціи $\psi(z)$ совпадаетъ съ нормальнымъ значеніемъ K_2.

Вспомнимъ при этомъ вышеуказанныя значенія модуля R, кои принимаются во вниманіе при опредѣленіи величины K_2, соотвѣтствующей разсматриваемому ортогональному пути ABC. Легко видѣть, что тѣ изъ этихъ значеній модуля R, кои совпадаютъ съ K_2, должны соотвѣтствовать точкамъ пути ABC, не совпадающимъ съ главными и подглавными точками, но

принадлежащимъ, подобно главнымъ и подглавнымъ точкамъ, къ совокупности точекъ (162). Этотъ признакъ нормальнаго значенія величины K_2 и нормальныхъ точекъ существенный.

Нормальныя точки могутъ быть двухъ родовъ: 1) *подобныя главнымъ*, т. е. такія, въ которыхъ при консервативной деформаціи пути abc соотвѣтствующіе безконечно малые элементы ортогонально сползающей нити встрѣтили препятствія сползанію и, растянувшись, образовали ортогональныя части основного пути, при чемъ этимъ нормальнымъ точкамъ соотвѣтствуютъ *maximum'ы* модуля R функціи $\psi(z)$ при движеніи точки z по пути ABC вблизи этихъ точекъ, и 2) *существенно нормальныя* точки, кои характеризуются тѣмъ, что онѣ помѣщаются на *нисходящихъ* ортогональныхъ вѣтвяхъ, входящихъ въ составъ основного пути и идущихъ *непосредственно* отъ главныхъ и подглавныхъ точекъ, при чемъ для существенно нормальной точки $\mathfrak{z}$ модуль $\psi(z)$ не обращается въ maximum при движеніи точки z по разсматриваемому ортогональному пути ABC вблизи $\mathfrak{z}$.

Чаще всего нормальныя точки оказываются подобными главнымъ. Въ самомъ дѣлѣ существенно нормальныя точки, какъ видно изъ ихъ опредѣленія, не возможны, если *ни одно* изъ отношеній вида:

$$\psi(\mathfrak{z}) : \psi(\zeta),$$

гдѣ ζ есть главная или подглавная точка и $\mathfrak{z}$ есть одна изъ точекъ (162), не совпадающихъ съ ζ и лежащихъ *ниже* уровня главныхъ точекъ, *не представляется количествомъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и меньшимъ 1.* Поэтому присутствіе существенно нормальныхъ точекъ представляется довольно рѣдкимъ случаемъ. Болѣе внимательное изученіе строенія разсматриваемаго основного пути ABC обнаруживаетъ, что существенно нормальная точка $\mathfrak{z}$ должна совпадать либо съ петлей, либо съ точкой z, соотвѣтствующей minimum'у модуля функціи $\psi(z)$ при движеніи z по кривой ABC вблизи точки $\mathfrak{z}$.

Различіе между двумя вышеуказанными категоріями нормальныхъ точекъ обнаруживается, между прочимъ, въ томъ случаѣ, когда для нормальнаго значенія величины K_2 отношеніе $K_2 : K_1$ стремится къ 1 (вслѣдствіе измѣненія какихъ либо параметровъ, вліяющихъ на величину этого отношенія). При этихъ обстоятельствахъ нормальная точка, подобная главной, переходитъ въ разрядъ подглавныхъ точекъ и въ предѣлѣ дѣлается главной. Но существенно нормальная точка $\mathfrak{z}$, будучи соединена восходящею отъ нея ортогональною вѣтвью съ соотвѣтствующею главною или подглавною точкой ζ, стремится совпасть съ ζ. При такихъ обстоятельствахъ долженъ возникнуть *существенно особый случай перваго рода* (см. n^0 21), если нормальное значеніе K_2 считать за критическое (въ указанномъ выше узкомъ смыслѣ). Въ самомъ дѣлѣ при этихъ условіяхъ функція

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy} = -\frac{f(z)\,\psi(z)}{\psi'(z)},$$

гдѣ z и y связаны уравненіемъ (17), должна имѣть особую точку $y = y_1$, соотвѣтствующую нормальной точкѣ $\mathfrak{z}$ и безконечно близкую къ точкѣ $y = 0$. Такимъ образомъ, при разсматриваемыхъ условіяхъ имѣетъ мѣсто не только особый случай перваго рода, но и особый случай второго рода. Этимъ характеризуется *существенно* особый случай перваго рода, въ которомъ затрудненія не устраняются, хотя бы мы какой либо иной консервативной деформаціей пути интеграціи понизили отношеніе $K_2 : K_1$; каковое пониженіе вообще возможно.

Коснувшись особыхъ случаевъ, замѣтимъ, что, между прочимъ, при безконечной близости двухъ главныхъ (въ расширенномъ смыслѣ) точекъ мы будемъ имѣть особый случай *второго рода* (см. nn^0 12 и 22). Но при этомъ, если одна изъ этихъ точекъ есть подглавная и если нормальное значеніе K_2 считать за критическое (въ узкомъ смыслѣ), то разсматриваемый особый случай втораго рода въ то же время можно истолковать *какъ существенно особый случай перваго рода* (см. § 6, n^0 21).

Многія вышеуказанныя свойства точекъ главныхъ, подглавныхъ, нормальныхъ и свойства величины K_1 провѣряются и уясняются при помощи основного пути, указаннаго въ n^0 33 для одного случая, соотвѣтствующаго простѣйшей модулярной поверхности.

Всѣ вѣтви найденнаго основного пути ABC, лежащіе выше уровня L, кромѣ безконечно малыхъ кривыхъ, образующихъ петли около иглъ, будутъ ортогональными линіями. Верхнія части этихъ ортогональныхъ вѣтвей, начиная отъ главныхъ и подглавныхъ точекъ, будутъ представлять собою кривыя, составляющія тѣ части звеньевъ перваго рода (n^0 8), для которыхъ выполняется второе главное условіе (n^0 6), такъ какъ для точки z, которая принадлежитъ ортогональной вѣтви, нисходящей отъ главной точки ζ, отношеніе $\psi(z) : \psi(\zeta)$ будетъ *правильною положительною дробью*. Вмѣстѣ съ тѣмъ преобразованіе перемѣннаго z при помощи любого изъ уравненій (17), (110) и (111) должно приводить къ дѣйствительному перемѣнному y.

Нижнія части ортогональнаго основного пути ABC могутъ быть отнесены къ *второстепеннымъ* частямъ звеньевъ этого пути (см. n^0 10), вліяющимъ только на погрѣшность искомаго приближеннаго выраженія интеграла $[ABC]$.

Упомянутую сейчасъ верхнюю часть $\zeta\xi$ звена перваго рода, идущую отъ главной или подглавной точки ζ и представляющую нисходящую вѣтвь ортогональной линіи N_ζ, проходящей чрезъ точку ζ, назовемъ *нормальнымъ звеномъ перваго рода*, если выполняются слѣдующія условія: 1) точка ξ удовлетворяетъ неравенству:

$$|\psi(\xi)| \leqq K_1 \tag{162'}$$

и 2) на протяженіи кривой $\zeta\xi$, кромѣ ζ, нѣтъ другихъ кратныхъ точекъ линіи N_ζ и особыхъ точекъ функціи $f(z)\,\psi^m(z)$. Изъ самаго опредѣленія величины K_1 слѣдуетъ, что упомянутыхъ сейчасъ кратныхъ точекъ линіи N_ζ и особыхъ точекъ интегрируемой функціи не можетъ находиться на части кри-

вой $\zeta\xi$, лежащей выше горизонтальной плоскости L_2, отстоящей отъ начала O на разстояніе K_2, и что такія точки могутъ оказаться на кривой $\zeta\xi$ лишь не выше уровня L_2. Изъ этого замѣчанія видна возможность построенія нормальныхъ звеньевъ.

Очевидно, нормальное звено перваго рода удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ теоремъ I—V, если выполнено первое главное условіе, указанное въ § 3 ($n^0 4$), при чемъ количество K_2 въ этомъ условіи должно опредѣлять при расширенномъ понятіи о главныхъ точкахъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ нормальное звено певваго рода оправдываетъ и тѣ допущенія, кои безъ доказательства приняты въ $n^0 10$ (пункт. I) при разсмотрѣніи вопроса объ отдѣленіи второстепенныхъ чистей основного пути ABC.

Если $\zeta\xi'$ и $\zeta\xi''$ суть два нормальныхъ звена второго рода, имѣющихъ общую главную или подглавную точку ζ, то часть $\xi'\xi''$ основного пути ABC, заключенную между точками ξ' и ξ'', назовемъ *нормальнымъ звеномъ второго рода.* Болѣе подробныя разъясненія относительно формы такихъ звеньевъ найдутъ мѣсто ниже (въ $n^0 28$),

Коснемся еще вопроса о *дополнительной* деформаціи ортогональнаго основного пути ABC. Иногда этотъ путь представляетъ въ его второстепенныхъ частяхъ особыя неудобства, которыя и устраняются упомянутой дополнительной консервативной деформаціей, относящейся къ второстепеннымъ частямъ этого пути (см. $n^0 10$). Необходимость такой деформаціи представляется тогда, когда упомянутыя части пути ABC проходятъ вблизи точекъ, для которыхъ нарушаются какія либо изъ условій, выполненіе коихъ требуется разсматриваемымъ методомъ. Такъ, при употребленіи той или другой изъ формулъ (61_1) и (61_4), нельзя допустить, чтобы второстепенная часть $\xi\xi'$ звена $\zeta\xi'$ основного пути ABC проходила вблизи точекъ, для которыхъ интегрируемая функція въ соотвѣтствующемъ изъ интеграловъ ($60''$) и (61_2) обращается въ безконечность, ибо близость эта неблагопріятно вліяетъ на выраженія, служащія для опредѣленія предѣловъ погрѣшности. Для устраненія подобныхъ затрудненій нужно деформировать основной путь такъ, чтобы онъ оставался основнымъ, но чтобы указанныя особыя точки

не лежали слишкомъ близко къ второстепеннымъ частямъ основного пути. При этой деформаціи иногда приходится даже не понижать, а напротивъ немного повышать величину K_2, лишь бы для преобразованнаго пути и при такомъ повышеніи K_2 выполнялось первое главное условіе, указанное въ § 3 (n^0 4).

Будемъ эту дополнительную деформацію выполнять такъ, чтобы и послѣ нея всѣ второстепенныя части основного пути и даже принадлежащія имъ петли состояли лишь изъ вѣтвей линій уровня и ортогональныхъ къ нимъ линій. Эти цѣли достигаются такою консервативною деформаціей, которая производится передвиженіями частей нити ABC вслѣдствіе лишь увеличенія толщины иглъ, при чемъ должна видоизмѣниться форма поверхности иглъ такъ, чтобы пересѣченія этихъ поверхностей съ модулярною представлялись линіями уровня и ортогональными къ нимъ линіями.

Пусть $\zeta\xi'$ есть *полное* звено перваго рода, принадлежащее ортогональному основному пути, второстепенная часть котораго $\xi\xi'$ подвергнута указанной сейчасъ дополнительной деформаціи. Всѣ части такого звена суть либо ортогональныя линіи, либо линіи уровня, при чемъ часть $\zeta\xi$, получаемая по отдѣленіи второстепенной части $\xi\xi'$, представляетъ непремѣнно ортогональную линію, для которой такимъ образомъ имѣетъ силу на *всемъ протяженіи* второе главное условіе, указанное въ § 3 (n^0 6); линіи же уровня могутъ принадлежать лишь второстепенной части. Вообразимъ затѣмъ, что точки z и y связаны уравненіемъ (17) и что $0\eta'$ и $\eta\eta'$ суть линіи, описываемыя точкой y въ то время, когда точка z описываетъ пути $\zeta\xi'$ и $\xi\xi'$. Легко видѣть, что линіи $0\eta'$ и $\eta\eta'$ суть *ломаныя*, состоящія изъ *прямолинейныхъ* отрѣзковъ двухъ родовъ: 1) совпадающихъ съ дѣйствительною осью или параллельныхъ ей (эти отрѣзки соотвѣтствуютъ ортогональнымъ вѣтвямъ) и 2) перпендикулярныхъ къ дѣйствительной оси (эти отрѣзки соотвѣтствуютъ вѣтвямъ, совпадающимъ съ линіями уровня, и могутъ принадлежать лишь части $\eta\eta'$ ломаной $0\eta'$). При этомъ отрѣзокъ 0η всегда совпадаетъ съ дѣйствительной осью и направленъ въ положительную сторону.

Изъ указанныхъ свойствъ линій $0\eta'$ и $\eta\eta'$ вытекаетъ что линіи эти весьма легко спрямляются, при чемъ длину l'_1 линіи $\eta\eta'$ важно имѣть при примѣненіи формулы (61_4), опредѣляющей вліяніе второстепенной части $\xi\xi'$ на погрѣшность приближенной величины интеграла $[\zeta\xi']$. Очевидно, длина l'_1 ломаной $\eta\eta'$ есть сумма абсолютныхъ величинъ приращеній дѣйствительныхъ количествъ x и h, опредѣляемыхъ уравненіемъ: $x+hi=y$,— приращеній, пріобрѣтаемыхъ этими количествами въ то время, когда точка y описываетъ всѣ отдѣльныя прямолинейныя части упомянутой ломаной.

n^0 26. Изложенный способъ полученія основного ортогональнаго пути ABC и его важнѣйшихъ элементовъ, т. е. главныхъ и подглавныхъ точекъ и количествъ K_1 и K_2, представляется простымъ лишь въ теоріи, а на практикѣ онъ встрѣчаетъ вообще не мало затрудненій, кромѣ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ. Трудности эти вообще даже превосходятъ тѣ, какія встрѣчаются въ теоріи Лагранжа при опредѣленіи критическихъ точекъ, лежащихъ на границахъ сходимости этого ряда, и при отысканіи приближеннаго выраженія далекаго члена этого ряда (см. n^0 38). Но характеръ тѣхъ и другихъ трудностей одинаковый и обусловливается необходимостью для рѣшенія поставленныхъ вопросовъ прослѣдить движеніе точки z ортогонально сползающей по модулярной поверхности нити, когда функція $\psi(z)$, сохраняя свою амплитуду, измѣняется вслѣдствіе убыванія своего модуля, и замѣтить, не встрѣтится ли эта точка z съ какою либо изъ точекъ (162). Эта задача требуетъ, слѣдовательно, *аналитическаго продолженія* z, какъ функціи модуля $\psi(z)$, изъ одной области въ другую ради того только, чтобы провѣрить, придетъ ли эта точка при данномъ измѣнененіи модуля z въ данный пунктъ или нѣтъ. Иногда такая задача рѣшается легко; но вообще она требуетъ извѣстныхъ сложныхъ вычисленій при помощи безконечныхъ рядовъ.

Такому обслѣдованію подлежатъ при построеніи ортогональнаго основного пути ABC всѣ точки деформируемаго пути, сползающаго начиная отъ *даннаго* первоначальнаго положенія abc этого пути. Но особенный интересъ представляютъ

тѣ точки деформируемаго пути, кои принадлежатъ особымъ элементамъ нити abc и при разсматриваемой деформаціи встрѣчаютъ точки (162), ибо при этихъ встрѣчахъ можетъ произойти образованіе главныхъ, подглавныхъ и нормальныхъ точекъ ортогональнаго основного пути ABC. Слѣдовательно, особенному обслѣдованію подлежатъ тѣ точки первоначальнаго пути abc, кои лежатъ на ортогональныхъ линіяхъ:

$$N_{\mathfrak{z}_1}, \; N_{\mathfrak{z}_2}, \; N_{\mathfrak{z}_3}, \ldots,$$

проходящихъ чрезъ точки (162). Произведемъ такое обслѣдованіе сначала для отысканія главныхъ, потомъ подглавныхъ и наконецъ нормальныхъ точекъ искомаго ортогональнаго основного пути ABC. Такое обслѣдованіе приведетъ насъ къ общимъ признакамъ, характеризующимъ эти точки.

Задачу эту, которая рѣшается при помощи указанныхъ ниже признаковъ главныхъ, подглавныхъ и нормальныхъ точекъ, можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Даны первоначальный путь abc интеграла (159) и вышеуказанныя точки (162). Указать, какія изъ этихъ точекъ будутъ главными, подглавными и нормальными точками ортогональнаго основного пути ABC, эквивалентнаго данному пути abc.

Пусть точки (162) расположены въ порядкѣ убыванія модуля R функціи $\psi(z)$, т е.

$$|\psi(\mathfrak{z}_1)| \geqq |\psi(\mathfrak{z}_2)| \geqq |\psi(\mathfrak{z}_3)| \geqq \ldots.$$

При рѣшеніи вопроса, какія изъ этихъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ будутъ главными, надлежитъ подвергать эти точки послѣдовательному разсмотрѣнію, начиная съ точки $\mathfrak{z}_1$, затѣмъ переходя къ точкѣ $\mathfrak{z}_2$, и т. д. и примѣняя къ этимъ точкамъ указанныя ниже признаки, по которымъ рѣшается вопросъ, будетъ ли разсматриваемая точка главною или подглавною, или же нѣтъ. Когда первая главная точка найдена и опредѣлилось количество K_1, тогда для отысканія остальныхъ главныхъ и подглавныхъ точекъ подвергаются соотвѣтствующему изслѣдованію лишь тѣ изъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$, для которыхъ модуль R

функціи $\psi(z)$ совпадаетъ съ K_1 или, будучи менѣе K_1, стремится къ K_1.

Переходя къ выраженію признаковъ, которыми характеризуются главныя и подглавныя точки основного пути ABC, установимъ сначала понятіе объ уникурсальныхъ вѣтвяхъ линій, ортогональныхъ къ линіямъ уровня. *Уникурсальною вѣтвью* [1]) будемъ называть всякую такую конечную непрерывную часть $z_1 z_2$ ортогональной линіи, на протяженіи которой *между* точками z_1 и z_2 нѣтъ ни нулей и безконечностей функціи $\psi(z)$, ни одной изъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ Если между двумя точками z_1 и z_2 можно провести уникурсальную вѣтвь, то такія двѣ точки назовемъ *уникурсально соединимыми.* Если путь abc пересѣкаетъ данную уникурсальную вѣтвь $z_1 z_2$ въ какой либо точкѣ z', то это пересѣченіе будемъ называть *положительнымъ* или *отрицательнымъ*, смотря потому, будетъ ли лицо, движущееся по пути abc, при переходѣ чрезъ точку z' видѣть часть уникурсальной вѣтви $z_1 z_2$, лежащую *ниже* точки z', справа или же слѣва.

При этихъ терминахъ признаки главныхъ точекъ основного пути ABC можно выразить такъ.

Признакъ I. Пусть точка $\mathfrak{z}$ принадлежитъ къ ряду вышеуказанныхъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и пусть ни одна изъ точекъ, лежащихъ выше уровня точки $\mathfrak{z}$, не принадлежитъ къ главнымъ. Если точка $\mathfrak{z}$ совпадаетъ съ одною изъ точекъ a и c и если эти точки при разсматриваемой деформаціи пути abc не могутъ быть перемѣщаемы, то $\mathfrak{z}$ есть главная точка основного пути ABC.

Признакъ II. Пусть точка $\mathfrak{z}$ принадлежитъ къ ряду вышеуказанныхъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и пусть ни одна изъ точекъ того же ряда, лежащихъ выше уровня точки $\mathfrak{z}$, не принадлежитъ къ главнымъ. Предположимъ, что точка $\mathfrak{z}$ не совпадаетъ съ точками кривой abc, кои при разсматриваемой деформаціи этого пути не могутъ быть перемѣщаемы. Если на кривой abc выше уровня точки $\mathfrak{z}$ нѣтъ точекъ z, уникурсально соединимыхъ съ $\mathfrak{z}$, то

---

[1]) Понятіе это почти не отличается отъ того, которое установлено въ главѣ III, (§ 12) диссертаціи *„Рядъ Лагранжа"*.

точка $\mathfrak{z}$ не можетъ быть главною. Если же на кривой abc выше уровня точки $\mathfrak{z}$ существуютъ точки z, уникурсально соединимыя съ точкой $\mathfrak{z}$, то всѣ эти точки z подраздѣлимъ на двѣ категоріи, смотря потому, будетъ ли пересѣченіе въ той или другой изъ нихъ пути abc съ уникурсальной вѣтвью *положительнымъ* или *отрицательнымъ*. Если числа точекъ z той и другой категоріи *различны*, то точка $\mathfrak{z}$ есть главная; въ противномъ случаѣ, т. е. при одинаковомъ числѣ точекъ z той и другой категоріи, точка $\mathfrak{z}$ не можетъ быть главной.

Признакъ III. Если точка $\mathfrak{z}$, взятая изъ числа точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$, лежитъ *выше* уровня точки, соотвѣтствующей модулю maximum maximorum функціи $\psi(z)$ при движеніи точки z по пути ABC, то $\mathfrak{z}$ не можетъ быть главной точкой и не можетъ лежать на пути ABC.

Признаки подглавныхъ точекъ, если таковыя существуютъ, остаются такими же, какъ вышеприведенные признаки главныхъ точекъ, но съ тѣмъ отличіемъ, что для подглавныхъ точекъ модуль $\psi(z)$ менѣе K_1 и стремится къ K_1.

Детальное изученіе свойствъ модуля R и амплитуды функціи $\psi(z)$, подобное тому, которое представлено въ статьѣ: «Рядъ Лагранжа», приводитъ въ различныхъ *частныхъ* случаяхъ къ значительнымъ упрощеніямъ признаковъ главныхъ и подглавныхъ точекъ.

Очевидно, трудности опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ зависятъ отчасти отъ сложности первоначальнаго пути abc. Поэтому, полезно, если можно, предварительной деформаціей пути abc привести его въ болѣе удобное положеніе.

Такъ, иногда путь abc можетъ быть сдѣланъ безконечно малою замкнутою кривою, окружающею особую точку v функціи $\psi(z)$. Это значительно упрощаетъ примѣненіе вышеуказанныхъ признаковъ, такъ какъ въ такомъ случаѣ всѣ главныя и подглавныя точки основного пути ABC будутъ уникурсально соединимыми съ одною и тою же точкою v, которую окружаетъ безконечно малая замкнутая кривая abc. Если при этомъ функція $\psi(z)$ въ области особой точки $z=v$ представляется такъ:

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-v)^{\alpha}},$$

гдѣ $\phi(z)$ есть функція голоморфная въ области точки $z=v$ и не обращающаяся въ нуль при $z=v$, и α есть положительное количество, то необходимое для рѣшенія задачи *аналитическое продолженіе* z, какъ функціи модуля $\psi(z)$, изъ области точки $z=v$ въ области главныхъ точекъ основного пути значительно облегчается. Связь значеній этой функціи въ указанныхъ областяхъ въ этомъ случаѣ устанавливается помощію Лагранжева ряда, въ который разлагается корень z уравненія

$$z-v=t\{\phi(z)\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

обращающійся въ $z=v$ при $t=0$. Подробнѣе этотъ интересный и важный случай трактуется ниже (въ *nn*° 37 и 38).

Послѣ опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ слѣдуетъ перейти къ нормальнымъ точкамъ, если таковыя существуютъ. Тѣ изъ нормальныхъ точекъ, кои подобны главнымъ, отыскиваются на основаніи тѣхъ же признаковъ, какъ главныя и подглавныя. Но въ рѣдкихъ случаяхъ могутъ быть еще существенно нормальныя точки, кои лежатъ на ортогональныхъ линіяхъ, проходящихъ чрезъ главныя или подглавныя точки. Такая точка должна быть уникурсально соединимою съ какою либо изъ главныхъ и подглавныхъ точекъ и притомъ уникурсально соединяющая эти точки ортогональная вѣтвь должна входить въ составъ ортогональнаго пути ABC.

Отмѣчая главныя и подглавныя точки, мы должны вмѣстѣ съ тѣмъ указывать и тѣ нисходящія отъ нихъ ортогональныя вѣтви, кои должны войти въ составъ основного пути ABC. Признаки этихъ вѣтвей, выясненныя выше (въ *n*° 24) при разсмотрѣніи деформаціи особыхъ элементовъ нити abc, полнѣе излагаются ниже (въ *n*° 28).

n° 27. Хотя ортогональный основный путь интегрированія и представляетъ многія удобства, однако на практикѣ невсегда приходится имъ пользоваться. Иногда полученіе ортогональнаго основного пути представляетъ затрудненія, между тѣмъ какъ неортогональный основной путь получается легко. Примѣръ этого, имѣющій весьма важное значеніе въ Теоріи Вѣроятностей, приведенъ въ § 3 (*n*° 7). Въ этомъ примѣрѣ основной

путь интеграціи представляется окружностью, проходящею чрезъ главныя точки, которыя соотвѣтствуютъ кратнымъ точкамъ ортогональныхъ линій.

Довольствуясь основнымъ путемъ интеграціи, который легче найти, хотя бы онъ былъ неортогональный, мы должны при отысканіи такого пути прежде всего опредѣлить его главныя и подглавныя точки, характеръ которыхъ выясненъ въ предшествующемъ параграфѣ. Очевидно главныя и подглавныя точки различныхъ хорошо направленныхъ основныхъ путей интегрированія, эквивалентныхъ данному пути abc, остаются однѣ и тѣ же. Поэтому способъ опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ неортогональнаго основного пути остается такой же, какъ въ случаѣ ортогональнаго основного пути.

§ 9. Замѣчанія о формѣ и свойствахъ звеньевъ второго рода. Непосредственные процессы приближеннаго вычисленія интеграла, отнесеннаго къ звену второго рода.

n° 28. Возвратимся къ разсмотрѣнію звеньевъ второго рода, о которыхъ была рѣчь въ *nn*° 8, 15 и 26. Пусть $\xi'\xi''$ будетъ звено второго рода, принадлежащее хорошо направленному основному пути ABC и соотвѣтствующее главной точкѣ ζ, не совпадающей съ точкою A или C. Будемъ воображать этотъ путь и его части какъ на модулярной поверхности, такъ и на плоскости комплекснаго перемѣннаго. Понятіе о главной точкѣ будемъ здѣсь разсматривать въ *расширенномъ* смыслѣ, причисляя къ главнымъ точкамъ также подглавныя (*n*° 21) и при этомъ опредѣляя K_2, какъ указано въ *n*° 21. Точки ξ' и ξ'' пусть удовлетворяютъ неравенствамъ (104).

Главная точка ζ, если она не есть особая точка функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, лежитъ на кривой $\xi'\xi''$, которую полнѣе можемъ обозначить такъ: $\xi'\zeta\xi''$.

Если же точка ζ есть особая, въ которой укрѣплена игла, то она не лежитъ на кривой $\xi'\xi''$; но въ составъ звена $\xi'\xi''$ входитъ петля $z'z''$, соотвѣтствующая точкѣ ζ, при чемъ точки z' и z'' лежатъ въ пересѣченіяхъ звеньевъ $\zeta\xi'$ и $\zeta\xi''$ перваго рода съ безконечно малою окружностью $pqrp$, описанною изъ

центра ζ. Звено $\xi'\xi''$ въ этомъ случаѣ полнѣе обозначается такъ: $\xi' z' z'' \xi''$.

Чтобы случай отсутствія петли $z'z''$ въ составѣ звена $\xi'\zeta\xi''$ не разсматривать отдѣльно, будемъ и въ этомъ случаѣ устраивать петлю $z'z''$ слѣдующимъ образомъ. Изъ центра ζ опишемъ безконечно малую окружность $pqrp$, обозначая ея пересѣченія со звеньями $\zeta\xi'$ и $\zeta\xi''$ чрезъ z' и z''. Дугу $z'z''$ этой окружности, заключенную между звеньями $\zeta\xi'$ и $\zeta\xi''$, и будемъ принимать за петлю, вводя ее въ составъ звена $\xi'\zeta\xi''$ вмѣсто тѣхъ частей его, которыя лежатъ внутри окружности $pqrp$, т. е. вмѣсто безконечно малыхъ кривыхъ $z'\zeta$ и $\zeta z''$. Конечно, радіусъ безконечно малой окружности $pqrp$ мы можемъ при этомъ во всякое время сдѣлать нулемъ, обращая петлю $z'z''$ въ точку ζ. Видоизмѣненное такимъ образомъ звено $\xi'\zeta\xi''$ представится кривою $\xi' z' z'' \xi''$, подобною той, какая имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если въ точкѣ ζ укрѣплена игла, причемъ такое видоизмѣненіе не окажетъ вліянія на послѣдующія результаты, такъ какъ радіусъ окружности $pqrp$ въ предѣлѣ мы считаемъ равнымъ нулю. Въ виду этого ниже подъ звеномъ $\xi'\xi''$ будемъ всегда разумѣть кривую, содержащую петлю $z'z''$, хотя бы въ точкѣ ζ не было укрѣплено иглы и будемъ полнѣе обозначать звено $\xi'\xi''$ такъ: $\xi' z' z'' \xi''$.

Будемъ сначала предполагать, что путь ABC *ортогональный* (распространеніе важнѣйшихъ формулъ на неортогональный, хорошо направленный основной путь ABC сдѣлано будетъ въ n^0 30) и что принадлежащее ему звено $\xi'\xi''$ второго рода *нормальное* (см. n^0 25), т. е. соотвѣтствующія звенья перваго рода $\zeta z' \xi'$ и $\zeta z'' \xi''$ представляютъ собою проекціи на плоскость комплекснаго перемѣннаго z нисходящихъ вѣтвей ортогональной линіи N_ζ, начерченной на модулярной поверхности и проходящей чрезъ точку ζ, при чемъ на протяженіи звена $\xi' z' z'' \xi''$ нѣтъ ни особыхъ точекъ функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, ни кратныхъ точекъ ортогональныхъ линій.

Условіямъ (104) не противорѣчитъ допущеніе, что точки ξ' и ξ'' модулярной поверхности лежатъ на одной и той же линіи уровня. При этомъ допущеніи, которое не представляется не-

обходимымъ для дальнѣйшихъ выводовъ и которое мы вводимъ въ изложеніе ради упрощенія формулъ, будемъ имѣть:

$$|\psi(\xi')| = |\psi(\xi'')| \leqq K_2 . \qquad (163)$$

Такъ какъ при этомъ амплитуды количествъ $\psi(\xi')$ и $\psi(\xi'')$ для ортогональнаго основного пути ABC равны (ибо точки ξ' и ξ'' принадлежатъ ортогональной линіи N_ζ), то

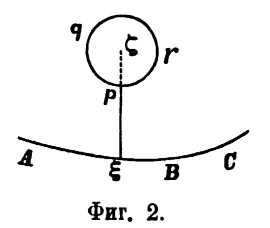
$$\psi(\xi') = \psi(\xi''). \qquad (163')$$

При указанномъ построеніи нормальныхъ звеньевъ вида $\xi' z' z'' \xi''$ пропускаются части ортогональнаго основного пути ABC, которыя мы въ правѣ трактовать какъ второстепенныя (см. n^0 10). Интегралы, отнесенные къ этимъ частямъ, могутъ быть принимаемы въ расчетъ лишь при оцѣнкѣ погрѣшности приближеннаго выраженія интеграла $[ABC]$.

Ниже будемъ предполагать, что ζ не есть особая точка функціи $\psi(z)$ и что вообще разсматриваемый случай не есть особый.

Представленное въ предшествующемъ параграфѣ изученіе образованія ортогональнаго основного пути ABC для различныхъ случаевъ показываетъ, что форма нормальнаго звена $\xi' z' z'' \xi''$ второго рода и входящей въ его составъ петли $z' z''$ можетъ быть различна. Понятіе объ этой формѣ даютъ фигуры 2 и 3, изображающія звенья второго рода въ проекціяхъ на плоскость комплекснаго перемѣннаго.

На фигурѣ 2 изображенъ случай, когда точки ξ' и ξ'' совпадаютъ другъ съ другомъ и представлены точкой ξ, а петля $z' z''$ образуетъ одинъ или нѣсколько обходовъ около точки ζ по окружности $pqrp$. При такихъ условіяхъ звено $\xi' z' z'' \xi''$ представится вообще кривою $\xi pqrpqrp \ldots pqrp\xi$, въ составъ которой входятъ слѣдующія части: 1) кривая ξp, представляющая собою вѣтвь проекціи ортогональной линіи N_ζ, 2) окружность $pqrp$, повторенная столько разъ, сколько



Фиг. 2.

обходовъ дѣлаетъ около точки ζ петля $z'z''$, и 3) кривая $p\xi$, совпадающая съ кривой ξp, но проходимая въ обратномъ направленіи [1]). Звено этой формы назовемъ *сомкнутымъ*.

На фигурѣ 3 изображенъ случай, когда точки ξ' и ξ'' не совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ точка ζ должна быть проекціей *кратной* точки ортогональной линіи N_ζ, а кривыя $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$ суть проекціи двухъ нисходящихъ вѣтвей развѣтвляющейся линіи N_ζ. Звено формы, изображенной на фигурѣ 3, назовемъ *разомкнутымъ*.

Фиг. 3.

Болѣе подробное изученіе звена $\xi'z'z''\xi''$ и соотвѣтствующей петли $z'z''$ приводитъ къ заключенію, что уголъ между касательными въ точкѣ ζ къ вѣтвямъ $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$ представляетъ *соизмѣримую* часть полной окружности 2π и, слѣдовательно, петля $z'z''$ слагается изъ нѣсколькихъ полныхъ обходовъ около точки ζ и *соизмѣримой* части полнаго обхода. Чтобы доказать это, нужно перенести изображенія на модулярную поверхность и разсмотрѣть положеніе вблизи точки ζ *нисходящихъ* вѣтвей ортогональной линіи N_ζ. Если ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$, то ортогональная линія N_ζ, развѣтвляясь въ точкѣ ζ, имѣетъ ν *нисходящихъ* отъ точки ζ вѣтвей, и касательныя къ этимъ вѣтвямъ дѣлятъ окружность, описанную изъ центра ζ, на ν *равныхъ* частей. Въ этомъ мы убѣждаемся, считая въ уравненіи (17) перемѣнное y безконечно малымъ *положительнымъ* и разлагая ν корней этого уравненія, безконечно близкихъ къ ζ, по степенямъ $y^{\frac{1}{\nu}}$. Изображенія этихъ корней $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ на модулярной поверхности должны принадлежать ν нисходя-

---

[1]) Если функція $f(z)\,\psi^m(z)$ однозначна въ области точки $z=\zeta$, то кривыя ξp и $p\xi$ могутъ быть выброшены изъ состава разсматриваемаго звена, которое приведется такимъ образомъ лишь къ обходамъ по окружности $pqrp$. При этихъ условіяхъ *точное* выраженіе интеграла $[\xi'z'z''\xi]$ получается при помощи теоріи интегральныхъ вычетовъ или остатковъ.

щимъ отъ ζ вѣтвямъ S_0, $S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ ортогональной линіи N_ζ. Корни эти для безконечно малаго положительнаго значенія y представляются соотвѣтственно въ формѣ:

$$z_k = \zeta + \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{2k\pi i}{\nu}} (1 + \varepsilon_k), k = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \quad (164)$$

гдѣ ε_k есть безконечно малая величина и H есть количество, опредѣляемое равенствомъ (145). Равенства (164) подтверждаютъ вышеуказанныя свойства угловъ между касательными линіями въ точкѣ ζ къ вѣтвямъ S_0, $S_1, \ldots, S_{\nu-1}$; а такъ какъ $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$ принадлежатъ къ этимъ вѣтвямъ, то уголъ между ними измѣряется частями окружности 2π, раздѣленной на ν *равныхъ* частей.

При этомъ возникаетъ вопросъ, *какія именно изъ вѣтвей* S_0, $S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ *совпадаютъ съ вѣтвями* $\zeta z'\xi'$ *и* $\zeta z''\xi''$. При рѣшеніи этого вопроса играютъ роль замѣчанія, сдѣланныя въ n^0 24 относительно сползанія особыхъ элементовъ нити *abc*, пересѣкающихъ ортогональную линію N_ζ и подвергающихся растяженію при встрѣчѣ препятствія въ точкѣ ζ. Допустимъ сначала существованіе только одного особаго элемента $z_1 z_2$ нити *abc*, имѣющаго промежуточную точку z на ортогональной линіи N_ζ и встрѣчающаго при ортогональномъ сползаніи препятствіе въ кратной точкѣ ζ. Эта точка z, принадлежащая элементу $z_1 z_2$, описываетъ при сползаніи нисходящую *уникурсальную* вѣтвь $z\zeta$ ортогональной линіи N_ζ, — и эта вѣтвь служитъ для рѣшенія поставленнаго вопроса: какъ видно изъ замѣчаній, сдѣланныхъ въ n^0 24 (пункт. II), *вѣтви* $\zeta z'\xi'$ *и* $\zeta z''\xi''$ *представляютъ пару смежныхъ вѣтвей* S_0, $S_1, \ldots, S_{\nu-1}$, *кои съ указанною вѣтвью* $z\zeta$ *образуютъ равные углы, имѣющіе величину* $\frac{\pi}{\nu}$, *а между собою встрѣчаются въ точкѣ* ζ *подъ угломъ* $\frac{2\pi}{\nu}$.

Вообразимъ затѣмъ, что существуетъ нѣсколько особыхъ элементовъ нити *abc*, пересѣкающихъ различныя вѣтви орто-

гональной линіи N_ζ, а при сползаніи встрѣчающихъ препятствіе въ точкѣ ζ и растягивающихся, по примѣру разсмотрѣннаго сейчасъ особаго элемента $z_1 z_2$, въ соотвѣтствующія пары смежныхъ вѣтвей S_0, $S_1, \ldots$, $S_{\nu-1}$. Разсмотримъ, при какихъ условіяхъ нѣсколько такихъ паръ, кои войдутъ въ составъ пути $a'b'c'$, указаннаго въ n^0 24, могутъ по сокращеніи *лишнихъ* вѣтвей кривой $a'b'c'$ (см. n^0 24), свестись къ двумъ только вѣтвямъ $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$. Замѣтимъ, что ортогональная линія N имѣетъ ν *восходящихъ* отъ точки ζ вѣтвей S'_0, $S'_1, \ldots$, $S'_{\nu-1}$, описываемыхъ корнями (164) или, иначе, корнями:

$$z'_k = \zeta + \left(\frac{-y}{H}\right)^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{\nu}}(1+\varepsilon_k),\ k=0,1,\ldots,\nu-1, \quad (164')$$

при *убываніи* y отъ нуля. Особые элементы нити abc, пересѣкающіе линію N_ζ и при сползаніи встрѣчающіе препятствіе въ точкѣ ζ, должны пересѣкать именно тѣ или другія изъ вѣтвей S'_0, $S'_1, \ldots$, $S'_{\nu-1}$, и, если особый элементъ $z_1 z_2$ пересѣкаетъ вѣтвь S'_k, то, послѣ встрѣчи препятствія въ точкѣ ζ и растяженія, онъ преобразуется въ пару нисходящихъ вѣтвей S_{k-1} и S_k, дѣля, какъ разъяснено выше, пополамъ уголъ $\frac{2\pi}{\nu}$ между этими вѣтвями. (При этомъ, если $k=\nu$, то вѣтвь S_ν считается за S_0). Предположимъ, что существуетъ n особыхъ элементовъ s_0, $s_1, \ldots$, s_{n-1} нити abc, лежащихъ на n *послѣдовательныхъ* вѣтвяхъ:

$$S'_k,\ S'_{k+1}, \ldots,\ S'_{k+n-1}.$$

Послѣ встрѣчи препятствія въ точкѣ ζ и растяженія по вышеуказанному закону, эти элементы преобразуются въ пары нисходящихъ отъ точки ζ вѣтвей:

$$S_{k-1} \text{ и } S_k,\ S_k \text{ и } S_{k+1}, \ldots,\ S_{k+n-1} \text{ и } S_{k+n};$$

Эти пары войдутъ въ составъ кривой $a'b'c'$, указанной въ n^0 24, при чемъ каждая изъ вѣтвей S_k, $S_{k+1}, \ldots$, S_{k+n-1}

при движеніи по пути $a'b'c'$ будетъ проходиться *два* раза. Если эти вѣтви при интеграціи должно проходить въ прямо противоположныхъ направленіяхъ и при одномъ и томъ же значеніи интегрируемой функціи, то всѣ вѣтви S_k, $S_{k+1}, \ldots$, S_{k+n-1} подлежатъ выбрасыванію изъ состава пути $a'b'c'$, какъ *лишнія*, такъ что въ составъ пути ABC войдутъ лишь двѣ вѣтви:

$$S_k \text{ и } S_{k+n}.$$

Эти двѣ вѣтви и представятъ собою вышеуказанныя звенья $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$, на которыя распадается звено $\xi' z' z''\xi''$. Очевидно, при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ звенья $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$ встрѣчаются въ точкѣ ζ подъ угломъ $\frac{2n\pi}{\nu}$.

Разсмотрѣвъ уголъ между звеньями $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$ по его абсолютной величинѣ, обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что этому углу можно затѣмъ присвоить также опредѣленный знакъ, связанный съ направленіемъ петли $z'z''$. Этотъ уголъ можно замѣнить приращеніемъ амплитуды разности $z-\zeta$, пріобрѣтаемымъ въ то время, когда точка z описываетъ петлю $z'z''$.

Замѣтивъ это, условимся чрезъ 2Ω обозначать уголъ съ вершиною въ точкѣ ζ, соотвѣтствующій петлѣ $z'z''$. Иначе говоря, 2Ω есть приращеніе амплитуды разности $z-\zeta$, пріобрѣтаемое въ то время, когда точка z описываетъ петлю $z'z''$. Изъ вышеуказанныхъ замѣчаній относительно угла между вѣтвями $\zeta z'\xi'$ и $\zeta z''\xi''$ слѣдуетъ, что уголъ 2Ω представляется такъ:

$$2\Omega = \frac{2n\pi}{\nu}, \tag{165}$$

гдѣ n есть *цѣлое* число. Если при этомъ n есть кратное число относительно ν, то разомкнутое звено $\xi' z' z''\xi''$ должно переходить въ сомкнутое звено $\xi z' z''\xi$, которое, такимъ образомъ, является лишь частнымъ случаемъ звена $\xi' z' z''\xi''$. Число n въ формулѣ (165) можетъ оказаться какъ *положительнымъ*, такъ и *отрицательнымъ*, что зависитъ отъ положенія разсматриваемаго угла

и отъ того, какое направленіе въ счетѣ угловъ считается положительнымъ.

n^0 29. Переходя къ процессамъ вычисленія интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$, сдѣлаемъ нѣсколько общихъ замѣчаній о функціи $f(z)$ и о подходящихъ къ этимъ процессамъ преобразованіяхъ перемѣннаго z.

Если функція $f(z)$ представляется въ формѣ:

$$f(z) = (z - \zeta)^{\beta_1 - 1} \varphi_1(z) + (z - \zeta)^{\beta_2 - 1} \varphi_2(z) + \ldots, \quad (166)$$

гдѣ $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$ суть функціи, голоморфныя въ области точки $z = \zeta$ и не обращающіеся въ нуль при $z = \zeta$, то мы можемъ интегралъ $[\xi' z' z'' \xi'']$ представить какъ сумму интеграловъ, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ членамъ второй части равенства (166). Поэтому въ послѣдующемъ мы будемъ для простоты предполагать, что функціи $f(z)$ имѣетъ форму:

$$f(z) = (z - \zeta)^{\beta - 1} \varphi(z), \quad (167)$$

гдѣ $\varphi(z)$ есть функція, голоморфная въ области точки $z = \zeta$ и не обращающаяся въ нуль при $z = \zeta$.

Если при этихъ условіяхъ звено $\xi' z' z'' \xi''$ сомкнутое и количество β, указанное во второй части равенства (167), представляетъ число *цѣлое*, то интегралъ $[\xi' z' z'' \xi'']$ легко выражается *точно* (при помощи интегральныхъ вычетовъ или остатковъ), а при цѣломъ *положительнымъ* β даже обращается въ нуль. Послѣ этого замѣчанія въ дальнѣйшемъ для сомкнутаго звена $\xi' z' z'' \xi''$ исключимъ изъ разсмотрѣніи случай, когда β есть цѣлое число. Но для разомкнутаго звена этотъ случай не подлежитъ исключенію изъ дальнѣйшаго разсмотрѣнія.

Относительно преобразованій перемѣннаго z замѣтимъ, что для того случая, когда для главной точки ζ имѣетъ силу условіе: $\psi'(\zeta) = 0$, преобразованія (17), (110) и (111) имѣютъ одну особенность, состоящую въ слѣдующемъ. Соотвѣтственныя фигуры, описываемыя точками z и y, будучи вообще конформными, т. е. подобными другъ другу въ безконечно малыхъ

частяхъ, *утрачиваютъ это свойство*, *если точка z безконечно близка къ точкѣ ζ и въ предѣлѣ сливается съ ζ.* Необходимо, поэтому, избрать другія преобразованія перемѣннаго z, если желаемъ, чтобы подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ не утрачивалось въ областяхъ точекъ $z=\zeta$ и $y=0$.

Процессъ приближеннаго вычисленія интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ можетъ быть основанъ на преобразованіяхъ перемѣннаго z въ этомъ интегралѣ, которыя отличаются отъ преобразованій (17), (110) и (111) лишь тѣмъ, что въ соотвѣтствующихъ уравненіяхъ y замѣняется чрезъ y^ν, гдѣ ν имѣетъ значеніе, указанное въ n^0 28. Общій видъ всѣхъ подобныхъ преобразованій можно представить уравненіемъ:

$$\psi(z) = \psi(\zeta) \cdot \psi_1(y), \tag{168}$$

предполагая, что

$$\psi_1(y) = 1 - y^\nu \vartheta(y), \tag{169}$$

гдѣ $\vartheta(y)$ есть функція голоморфная въ области точки $y=0$, представляющая *положительное* количество при $y \geqq 0$ и необращающаяся въ нуль при $y=0$. Пусть

$$\vartheta(0) = 1. \tag{169'}$$

При указанныхъ условіяхъ уравненіе (168) имѣетъ ν корней относительно z, *голоморфныхъ* въ области точки $y=0$ и обращающихся въ $z=\zeta$ при $y=0$. Пусть одинъ изъ нихъ будетъ:

$$z = F(y) = \zeta + \left(\frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{\nu}} y + \ldots, \tag{170}$$

гдѣ H опредѣляется равенствомъ (145). Не трудно при этомъ усмотрѣть, 1) что всѣ корни уравненія (168), обращающіеся при $y=0$ въ $z=\zeta$, будутъ получаться при помощи формулы:

$$z_k = F\left(y e^{\frac{2k\pi i}{\nu}}\right), \; k = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \tag{171}$$

2) что точки y и z, связанные уравненіемъ: $z = F(y)$, при движеніи описываютъ въ областяхъ точекъ $z = \zeta$ и $y = 0$ соотвѣтственныя *конформныя* фигуры (т. е. фигуры, подобныя одна другой въ безконечно малыхъ частяхъ); 3) что при движеніи точки z по кривой $\xi' z' z'' \xi''$ точка y, удовлетворяющая уравненію $z = F(y)$, описываетъ подобную (въ безконечно малыхъ частяхъ) кривую $\eta\gamma\gamma'\eta'$, которая будетъ сомкнутою или разомкнутою, смотря потому, будетъ ли кривая $\xi' z' z'' \xi''$ сомкнутая или разомкнутая.

Очевидно, послѣ преобразованія въ интегралѣ $[\xi' z' z'' \xi'']$ перемѣннаго z при помощи уравненія $z = F(y)$, новый путь интегрированія представится упомянутою сейчасъ кривою $\eta\gamma\gamma'\eta'$.

n° 29. Въ дальнѣйшемъ разсмотримъ три частныхъ случая указаннаго общаго преобразованія (168), получаемыхъ изъ преобразованій (17), (110) и (111) замѣною y чрезъ y^ν. Эти три преобразованія, чаще примѣняемыя на практикѣ, опредѣляются соотвѣтственно уравненіями:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\, e^{-y^\nu}, \quad \psi(z) = \psi(\zeta)\,(1 - y^\nu), \quad \psi(z) = \frac{\psi(\zeta)}{1 + y^\nu}. \tag{172}$$

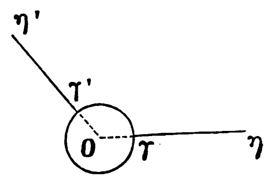
Полученныя при этомъ формулы приближенныхъ выраженій интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ будутъ соотвѣтствовать прежнимъ формуламъ, выводимымъ помощію соотвѣтственныхъ преобразованій (17), (110) и (111) и процессовъ, примѣненныхъ къ двумъ звеньямъ $\zeta z' \xi'$ и $\zeta z'' \xi''$ перваго рода, на которыя распадается звено $\xi' z' z'' \xi''$ втораго рода (см. *n*° 15).

Примѣняя то или другое изъ преобразованій (172), мы будемъ имѣть дѣло съ вышеупомянутымъ преобразованнымъ путемъ $\eta\gamma\gamma'\eta'$, который описываетъ точка y, удовлетворяющая соотвѣтствующему уравненію (170), въ то время, когда точка z описываетъ звено $\xi' z' z'' \xi''$. При этомъ интегралъ $[\xi' z' z'' \xi'']$ пред-

ставится, послѣ преобразованія перемѣннаго z, въ слѣдующей формѣ:

$$[\xi' z' z'' \xi''] = \int\limits_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} \psi^m(z) f(z) \frac{dz}{dy} dy. \qquad (172')$$

Путь $\eta\gamma\gamma'\eta'$ изображенъ на фигурѣ 4. Его части $\eta\gamma$ и $\gamma'\eta'$ суть прямолинейные отрѣзки, пересѣкающіеся въ точкѣ $y = 0$ подъ угломъ, равнымъ углу между звеньями $\zeta z' \xi'$ и $\zeta z'' \xi''$. Далѣе часть $\gamma\gamma'$ пути $\eta\gamma\gamma'\eta'$, описываемая точкой y въ то время, когда точка z описываетъ петлю $z'z''$, будетъ принадлежать безконечно малой замкнутой кривой, окружающей точку $y = 0$, при чемъ дугѣ $\gamma\gamma'$ этой кривой соотвѣтствуетъ уголъ 2Ω при вершинѣ O, опредѣляемый равенствомъ (165). Заключенія эти вытекаютъ изъ подобія фигуръ $\xi' z' z'' \xi''$ и $\eta\gamma\gamma'\eta'$ въ безконечно малыхъ частяхъ. Если при этомъ мы приемемъ въ расчетъ равенство (163), то придемъ къ заключенію, что



Фиг. 4.

$$\eta' = \eta\, e^{2\Omega i}, \qquad (173)$$

гдѣ Ω опредѣляется равенствомъ (165).

Предположимъ еще, что вышеупомянутый корень $z = F(y)$, опредѣляемый равенствомъ (170), избранъ такъ, чтобы y было положительнымъ, когда z движется по звену $\zeta z' \xi'$. Это достигается надлежащимъ выборомъ количества:

$$\left(\frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

входящаго въ равенство (170) и имѣющаго ν значеній. При такомъ выборѣ корня $z = F(y)$ весь прямолинейный отрѣзокъ $\eta\gamma$ (фиг. 4) будетъ частью дѣйствительной положительной оси.

Замѣтимъ между прочимъ, что если функція $f(z)$ имѣетъ видъ (167) и если

$$\beta' > 0\,, \tag{174}$$

гдѣ β' есть дѣйствительная часть количества β, то равенство (172′) приводится къ виду:

$$[\xi' z' z'' \xi''] = \int_0^{\eta} \psi'''(z)\,\{\alpha\,\Pi(\alpha y) - \Pi(y)\}\,dy, \tag{175}$$

гдѣ

$$\alpha = e^{2\Omega i} \text{ и } \Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy}\,. \tag{175′}$$

Имѣя равенство (172′), затѣмъ можемъ разлагать входящую во вторую его часть функцію

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy}$$

по степенямъ y. Разложеніе это для случая, когда функція $f(z)$ имѣетъ форму (167), должно имѣть видъ:

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy} = y^{\beta-1}(A_0 + A_1 y + \ldots\ldots + A_{s-1}\,y^{s-1} + y^s B_s), \tag{176}$$

гдѣ B_s есть функція, сохраняющая конечное значеніе для точекъ y пути $\eta\,\gamma\,\gamma'\,\eta'$. Разложеніе (176) можетъ быть получено при помощи какъ ряда Маклорена (см. n^0 14), такъ и ряда Лагранжа. Частный примѣръ примѣненія строки Маклорена будетъ представленъ ниже (въ n^0 34). Въ общемъ случаѣ воспользуемся для полученія разложенія (176) рядомъ Лагранжа съ теоремою Коши-Руше, дающею въ самомъ общемъ случаѣ, когда примѣнимъ нашъ методъ, средства удовлетворить всѣмъ предположеніямъ, на которыхъ основывается рѣшеніе задачи о приближенномъ вычисленіи интеграла вида (1).

Примѣняя рядъ Лагранжа, мы должны привести соотвѣтствующее изъ трехъ уравненій (172) къ виду:

$$z - \zeta = y \, . \, \Theta(z), \tag{177}$$

гдѣ функція $\Theta(z)$ опредѣляется соотвѣтствующимъ изъ уравненій:

$$\Theta(z) = \left\{ \frac{(z-\zeta)^\nu}{\lg \psi(\zeta) - \lg \psi(z)} \right\}^{\frac{1}{\nu}}, \tag{178}$$

$$\Theta(z) = \left\{ \frac{\psi(\zeta)\,(z-\zeta)^\nu}{\psi(\zeta) - \psi(z)} \right\}^{\frac{1}{\nu}}, \tag{178'}$$

$$\Theta(z) = \left\{ \frac{\psi(z)\,(z-\zeta)^\nu}{\psi(\zeta) - \psi(z)} \right\}^{\frac{1}{\nu}}. \tag{178''}$$

При этомъ соотвѣтствующую функцію $\Theta(z)$, которая имѣетъ ν значеній, будемъ выбирать такъ, чтобы вышеуказанный корень $z = F(y)$ преобразующаго уравненія, представленный равенствомъ (170) и движущійся по звену $\zeta z' \xi'$, когда y возрастаетъ отъ нуля, совпадалъ съ корнемъ уравненія (177), разлагающимся по формулѣ Лагранжа. При такомъ выборѣ значенія функціи $\Theta(z)$ количества:

$$\eta = \frac{\xi' - \zeta}{\Theta(\xi')} \text{ и } \eta' = \frac{\xi'' - \zeta}{\Theta(\xi'')} \tag{179}$$

будутъ первое положительнымъ, а второе комплекснымъ, имѣющимъ амплитуду 2Ω, при чемъ Ω опредѣляется равенствомъ (165).

Функція $\Pi(y)$ для случая, когда $f(z)$ имѣетъ форму (167), приводится помощію уравненія (177) къ виду:

$$\Pi(y) = f(z)\,\frac{dz}{dy} = y^{\beta-1} H(z), \tag{180}$$

гдѣ

$$H(z) = \frac{\Theta^{\beta-1}(z)\,\varphi(z)}{\Theta(z) - (z-\zeta)\,\Theta'(z)}. \tag{181}$$

Очевидно, функція $H(z)$ голоморфная въ области точки $z=\zeta$. Примѣняя къ ея разложенію по степенямъ y формулу Лагранжа съ теоремою Коши-Руше, обозначимъ чрезъ r положительную величину, меньшую разстоянія точки ζ отъ ближайшей къ ζ изъ особыхъ точекъ функцій $\Theta(z)$ и $H(z)$. Если ближайшая къ ζ изъ особыхъ точекъ функцій $H(z)$ и $\Theta(z)$ окажется безконечно близкою къ ζ, то будетъ имѣть мѣсто особый случай второго рода. Но мы устранили этотъ случай, и, слѣдовательно, можемъ величину r избрать такъ, чтобы она была конечною. Далѣе обозначимъ чрезъ M и N модули maximum maximorum функцій:

$$\frac{1}{r}\,\Theta(\zeta + re^{\omega i}) \text{ и } H'(\zeta + re^{\omega i})$$

при возрастаніи ω отъ 0 до 2π. Предположимъ, что

$$\eta M < 1. \tag{182}$$

При разсматриваемыхъ обстоятельствахъ условіе (182) всегда можетъ быть выполнено, благодаря возможности уменьшать величину η поднятіемъ значенія K_2, лишь бы такое поднятіе не нарушало перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4).

Такимъ образомъ, будутъ выполнены условія примѣненія теоремы Коши-Руше къ уравненію (177) и къ функціи $H(z)$ для всѣхъ точекъ y кривой $\eta\gamma\gamma'\eta'$, для которой имѣетъ силу равенство (173) и которая изображена на фигурѣ 4. Это примѣненіе показываетъ, что всѣ точки y кривой $\eta\gamma\gamma'\eta'$ должны лежать внутри круга сходимости разложенія функціи $H(z)$ въ рядъ Лагранжа по степенямъ y, а всѣ точки z кривой $\xi' z' z'' \xi''$ должны лежать внутри круга, описаннаго изъ центра ζ радіусомъ r. Вмѣстѣ съ тѣмъ по той же теоремѣ будемъ имѣть:

$$H(z) = H(\zeta) + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{y^k}{1.2\ldots k}\, \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + R_s,$$

гдѣ (183)

$$R_s = \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{y^k}{1.2\ldots k}\, \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}. \tag{184}$$

Внося выраженіе (183) функціи $H(z)$ во вторую часть равенства (180), а затѣмъ внося полученное выраженіе функціи $\Pi(y) = f(z)\dfrac{dz}{dy}$ въ равенство (172′), находимъ:

$$[\xi' z' z'' \xi''] = \psi^m(\zeta) \cdot \Big\{ H(\zeta) J_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{J_k}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + \rho_s \Big\}, \qquad (185)$$

гдѣ

$$\rho_s = \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{J_k}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}, \qquad (186)$$

$$J_k = \int_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta+k-1} dy. \qquad (187)$$

При условіи:

$$\beta' + k > 0, \qquad (188)$$

гдѣ β' есть дѣйствительная часть количества β, и на основаніи равенства (173) интегралъ J_k представляется такъ:

$$J_k = u_k \int_0^{\eta} \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta+k-1} dy, \qquad (189)$$

гдѣ

$$u_k = e^{2\Omega(\beta+k)i} - 1.$$

Пусть число s выбрано такъ, что условіе (188) удовлетворяется при $k = s$, т. е.

$$\beta' + s > 0. \qquad (190)$$

Въ такомъ случаѣ всѣ интегралы J_k, входящіе въ равенство (186), опредѣляются по формулѣ (189). Имѣя въ виду это замѣчаніе и полагая:

$$c = 1 + |e^{2\Omega\beta i}|, \qquad (190')$$

а также помня, что при выполненіи условія (182) на основаніи теоремы Коши-Руше имѣетъ силу неравенство:

$$\left|\frac{1}{1.2\ldots k}\ \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}\right| < \frac{r}{k} N.M^k, \qquad (191)$$

убѣждаемся, что

$$|\rho_s| < \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{rc}{s} N.M^k \int_0^\eta \frac{\psi^m(z)}{\psi'''(\zeta)} y^{\beta'+k-1} dy =$$

$$= \frac{rc}{s} N.M^s \int_0^\eta \frac{\psi^m(z)\, y^{\beta'+s-1}\, dy}{\psi'''(\zeta)\,(1-yM)}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при условіи (190)

$$\rho_s = \lambda \cdot \frac{rc}{s} \cdot \frac{N.M^s}{1-\eta M} \int_0^\eta \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta'+s-1} dy, \quad |\lambda < |, \qquad (192)$$

$$\beta' + s > 0.$$

Можемъ получить еще болѣе чувствительное выраженіе для ρ_s на основаніи слѣдующихъ соображеній.

При условіи (190), изъ равенствъ (165), (186) и (189) и неравенства (191) слѣдуетъ, что

$$|\rho_s| < \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{rc_k}{k} N.M^k \int_0^\eta \frac{\psi^m(z)}{\psi'''(\zeta)} y^{\beta'+k-1} dy,$$

гдѣ

$$c_k = |u_k| = |e^{\frac{2\pi n(\beta+k)i}{\nu}} - 1|. \qquad (192')$$

Отсюда и изъ равенства:

$$c_{k+\nu} = c_k$$

слѣдуетъ, что

$$|\rho_s| < \frac{r}{s} \cdot N. M^s \int\limits_0^\eta \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} \; \frac{y^{\beta'+s-1}\,\Phi(y)\,dy}{1 - y^\nu M^\nu},$$

гдѣ

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{sc_{k+s}}{s+k} M^k y^k. \qquad (192'')$$

Слѣдовательно

$$\rho_s = \lambda \frac{r}{s} \cdot \frac{N. M^s . \Phi(\eta)}{1-\eta^\nu M^\nu} \int\limits_0^\eta \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta'+s-1} dy, \quad |\lambda| < 1, \quad (193)$$

гдѣ $\Phi(\eta)$ опредѣляется при помощи равенствъ (192′) и (192″).

Замѣтимъ, наконецъ, что формула (192) можетъ быть замѣнена и такою формулой, которая свободна отъ ограниченія ея условіями сходимости Лагранжева ряда, примѣненнаго къ функціи $H(z)$. Въ такомъ случаѣ вмѣсто безконечнаго ряда (184) мы должны взять уравненіе вида:

$$R_s = y^s B_s, \qquad (193')$$

гдѣ B_s есть функція, опредѣляемая уравненіями (183) и (193′), въ которыхъ R_s подлежитъ исключенію. Вмѣсто равенства (186) при этихъ условіяхъ будемъ имѣть:

$$\rho_s = \int\limits_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta+s-1} B_s\, dy. \qquad (193'')$$

Отсюда, при условіи $\beta' + s > 0$, слѣдуетъ, что

$$\rho_s = \lambda\mu \int\limits_0^\eta \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta'+s-1} dy, \quad |\lambda| < 1, \qquad (193''')$$

Очевидно, функція $H(z)$ голоморфная въ области точки $z=\zeta$. Примѣняя къ ея разложенію по степенямъ y формулу Лагранжа съ теоремою Коши-Руше, обозначимъ чрезъ r положительную величину, меньшую разстоянія точки ζ отъ ближайшей къ ζ изъ особыхъ точекъ функцій $\Theta(z)$ и $H(z)$. Если ближайшая къ ζ изъ особыхъ точекъ функцій $H(z)$ и $\Theta(z)$ окажется безконечно близкою къ ζ, то будетъ имѣть мѣсто особый случай второго рода. Но мы устранили этотъ случай, и, слѣдовательно, можемъ величину r избрать такъ, чтобы она была конечною. Далѣе обозначимъ чрезъ M и N модули maximum maximorum функцій:

$$\frac{1}{r}\,\Theta(\zeta+re^{\omega i}) \text{ и } H'(\zeta+re^{\omega i})$$

при возрастаніи ω отъ 0 до 2π. Предположимъ, что

$$\eta M < 1. \tag{182}$$

При разсматриваемыхъ обстоятельствахъ условіе (182) всегда можетъ быть выполнено, благодаря возможности уменьшать величину η поднятіемъ значенія K_2, лишь бы такое поднятіе не нарушало перваго главнаго условія, указаннаго въ § 3 (n^0 4).

Такимъ образомъ, будутъ выполнены условія примѣненія теоремы Коши-Руше къ уравненію (177) и къ функціи $H(z)$ для всѣхъ точекъ y кривой $\eta\gamma\gamma'\eta'$, для которой имѣетъ силу равенство (173) и которая изображена на фигурѣ 4. Это примѣненіе показываетъ, что всѣ точки y кривой $\eta\gamma\gamma'\eta'$ должны лежать внутри круга сходимости разложенія функціи $H(z)$ въ рядъ Лагранжа по степенямъ y, а всѣ точки z кривой $\xi' z' z'' \xi''$ должны лежать внутри круга, описаннаго изъ центра ζ радіусомъ r. Вмѣстѣ съ тѣмъ по той же теоремѣ будемъ имѣть:

$$H(z)=H(\zeta)+\sum_{k=1}^{k=s-1}\frac{y^k}{1.2\ldots k}\,\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}+R_s,$$

гдѣ (183)

$$R_s=\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{y^k}{1.2\ldots k}\,\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}. \tag{184}$$

Вносяя выраженіе (183) функціи $H(z)$ во вторую часть равенства (180), а затѣмъ внося полученное выраженіе функціи $\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy}$ въ равенство (172′), находимъ:

$$[\xi' z' z'' \xi''] = \psi^m(\zeta) . \Big\{ H(\zeta) J_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{J_k}{1.2...k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + \rho_s \Big\}, \qquad (185)$$

гдѣ

$$\rho_s = \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{J_k}{1.2...k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}, \qquad (186)$$

$$J_k = \int_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta+k-1} dy. \qquad (187)$$

При условіи:

$$\beta' + k > 0, \qquad (188)$$

гдѣ β' есть дѣйствительная часть количества β, и на основаніи равенства (173) интегралъ J_k представляется такъ:

$$J_k = u_k \int_0^{\eta} \frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)} y^{\beta+k-1} dy, \qquad (189)$$

гдѣ

$$u_k = e^{2\Omega(\beta+k)i} - 1.$$

Пусть число s выбрано такъ, что условіе (188) удовлетворяется при $k = s$, т. е.

$$\beta' + s > 0. \qquad (190)$$

Въ такомъ случаѣ всѣ интегралы J_k, входящіе въ равенство (186), опредѣляются по формулѣ (189). Имѣя въ виду это замѣчаніе и полагая:

$$c = 1 + |e^{2\Omega\beta i}|, \qquad (190')$$

а также помня, что при выполненіи условія (182) на основаніи теоремы Коши-Руше имѣетъ силу неравенство:

$$\left|\frac{1}{1.2\ldots k}\;\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}\right|<\frac{r}{k}N.M^k, \qquad (191)$$

убѣждаемся, что

$$|\rho_s|<\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{rc}{s}N.M^k\int_0^\eta\frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)}y^{\beta'+k-1}dy=$$

$$=\frac{rc}{s}N.M^s\int_0^\eta\frac{\psi^m(z)\,y^{\beta'+s-1}\,dy}{\psi^m(\zeta)\,(1-yM)}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при условіи (190)

$$\rho_s=\lambda\cdot\frac{rc}{s}\cdot\frac{N.M^s}{1-\eta M}\int_0^\eta\frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)}y^{\beta'+s-1}dy,\quad |\lambda<|, \qquad (192)$$

$$\beta'+s>0.$$

Можемъ получить еще болѣе чувствительное выраженіе для ρ_s на основаніи слѣдующихъ соображеній.

При условіи (190), изъ равенствъ (165), (186) и (189) и неравенства (191) слѣдуетъ, что

$$|\rho_s|<\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{rc_k}{k}N.M^k\int_0^\eta\frac{\psi^m(z)}{\psi^m(\zeta)}y^{\beta'+k-1}dy,$$

гдѣ

$$c_k=|u_k|=|e^{\frac{2\pi n(\beta+k)i}{\nu}}-1|. \qquad (192')$$

Отсюда и изъ равенства:

$$c_{k+\nu}=c_k$$

слѣдуетъ, что

$$|\rho_s| < \frac{r}{s} . N . M^s \int_0^{\eta} \frac{\psi'''(z)}{\psi'''(\zeta)} \frac{y^{\beta'+s-1}\, \Phi(y). dy}{1 - y^{\nu} M^{\nu}},$$

гдѣ

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{sc_{k+s}}{s+k} M^k y^k. \qquad (192'')$$

Слѣдовательно

$$\rho_s = \lambda \frac{r}{s} . \frac{N . M^s . \Phi(\eta)}{1-\eta^{\nu} M^{\nu}} \int_0^{\eta} \frac{\psi'''(z)}{\psi'''(\zeta)} y^{\beta'+s-1} dy, \quad |\lambda| < 1, \qquad (193)$$

гдѣ $\Phi(\eta)$ опредѣляется при помощи равенствъ (192′) и (192″).

Замѣтимъ, наконецъ, что формула (192) можетъ быть замѣнена и такою формулой, которая свободна отъ ограниченія ея условіями сходимости Лагранжева ряда, примѣненнаго къ функціи $H(z)$. Въ такомъ случаѣ вмѣсто безконечнаго ряда (184) мы должны взять уравненіе вида:

$$R_s = y^s B_s, \qquad (193')$$

гдѣ B_s есть функція, опредѣляемая уравненіями (183) и (193′), въ которыхъ R_s подлежитъ исключенію. Вмѣсто равенства (186) при этихъ условіяхъ будемъ имѣть:

$$\rho_s = \int_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} \frac{\psi'''(z)}{\psi'''(\zeta)} y^{\beta+s-1} B_s\, dy. \qquad (193'')$$

Отсюда, при условіи $\beta' + s > 0$, слѣдуетъ, что

$$\rho_s = \lambda\mu \int_0^{\eta} \frac{\psi'''(z)}{\psi'''(\zeta)} y^{\beta'+s-1} dy, \quad |\lambda| < 1, \qquad (193''')$$

гдѣ μ есть наибольшее значеніе модуля выраженія

$$y^{\beta-\beta'} B_s$$

для точекъ кривой $\eta\gamma\gamma'\eta'$.

Формула (185) и та или другая изъ формулъ (192), (193) и (193‴) приводятъ задачу къ приближенному вычисленію интеграловъ вида (187) и къ оцѣнкѣ предѣловъ интеграла, входящаго во вторую часть равенства (192). Эти вопросы мы разсмотримъ отдѣльно для каждаго изъ преобразованій (172).

n^0 30. Примѣняя къ вычисленію интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ первое изъ преобразованій (172), будемъ имѣть:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\, e^{-y^\nu}. \tag{194}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенства (187) и (193) получаютъ видъ:

$$J_k = \int\limits_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} e^{-my^\nu} y^{\beta+k-1}\, dy, \tag{195}$$

$$\rho_s = \lambda \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{N.M^s\, \Phi(\eta)}{1-\eta^\nu M^\nu} \int\limits_0^\eta e^{-my^\nu} y^{\beta'+s-1}\, dy =$$

$$= \lambda\theta \frac{r}{s} \cdot \frac{N.M^s\, \Phi(\eta)}{1-\eta^\nu M^\nu} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{\nu . m^{\frac{\beta'+s}{\nu}}}, \tag{195'}$$

$$|\lambda| < 1,\ 0 < \theta < 1,\ \beta' + s > 0.$$

Разсмотримъ путь $\eta\gamma\gamma'\eta'$ интегрированія въ предѣлѣ, когда $\eta = +\infty$ и $\eta' = +\infty . e^{2\Omega i}$, гдѣ Ω опредѣляется равенствомъ (165). Этотъ предѣльный путь интегрированія обозначимъ чрезъ S и положимъ:

$$j_k = \int\limits_{(S)} e^{-my^\nu} y^{\beta+k-1}\, dy = \frac{u_k\, \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right)}{\nu . m^{\frac{\beta+k}{\nu}}}, \tag{196}$$

гдѣ

$$u_k = e^{2\Omega(\beta+k)i} - 1. \qquad (196')$$

Очевидно, равенство (195) приводится къ виду:

$$J_k = j_k + u_k . \delta'_k, \qquad (197)$$

гдѣ интегралъ j_k, опредѣляемый равенствомъ (196), есть приближенная величина интеграла J_k вида (195), а $u_k . \delta'_k$ есть погрѣшность этой величины, при чемъ количество δ'_k представляется на основаніи равенства (173) такъ:

$$\delta'_k = -\int_{\eta}^{\infty} e^{-my^{\nu}} y^{\beta+k-1} dy. \qquad (198)$$

Для полученія предѣловъ величины δ'_k при дѣйствительномъ β можемъ преобразовать интегралъ (198), положивъ: $y^{\nu} = u$, и послѣ преобразованія воспользоваться неравенствами вида (45) и (45'). Такимъ образомъ найдемъ:

$$\frac{-\eta^{\beta+k} e^{-m\eta^{\nu}}}{m\nu\eta^{\nu} - \beta - k + \nu} \leqq \delta'_k \leqq \frac{-\eta^{\beta+k-\nu} e^{-m\eta^{\nu}}}{m\nu}, \qquad (199)$$

если $\beta + k - \nu \geqq 0$, и

$$\frac{-\eta^{\beta+k-\nu} e^{-m\eta^{\nu}}}{m\nu} \leqq \delta'_k \leqq -\frac{\eta^{\beta+k} e^{-m\eta^{\nu}}}{m\nu\eta^{\nu} - \beta - k + \nu}, \qquad (199')$$

если $\beta + k - \nu \leqq 0$.

Для полученія предѣловъ δ'_k при мнимомъ β замѣтимъ, что изъ равенства (198) вытекаетъ слѣдующее:

$$\delta'_k = \lambda \int_{\eta}^{\infty} e^{-my^{\nu}} y^{\beta'+k-1} dy, \quad |\lambda| < 1, \qquad (200)$$

Равенство (172′) при помощи равенствъ (180), $(202'_2)$, $(202''_2)$ и (194) приводится къ виду:

$$[\xi' z' z'' \xi''] = \psi^m(\zeta) \Big\{ H(\zeta) J_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{J_k}{1.2\ldots k} \; \frac{d^{k-1}\{H(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} + \rho_s \Big\}, \qquad (202_3)$$

гдѣ

$$J_k = \int\limits_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} e^{-my^\nu}\, y^{\beta+k-1}\, dy, \qquad (202_4)$$

$$\rho_s = \int\limits_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} e^{-my^\nu}\, y^{\beta+s-1}\, B_s\, dy, \qquad (202_5)$$

при чемъ $\Theta(\zeta)$ и $H(\zeta)$ опредѣляются равенствами (178) и (181).

Предположимъ, что значенiе многозначнаго (при $\nu > 1$) выраженiя $\Theta(\zeta)$ выбрано такъ, что дѣйствительная ось совпадаетъ съ касательной въ точкѣ O къ кривой $O\eta$, которую описываетъ точка y при движенiи z по кривой $\zeta\xi'$.

Вообразимъ двѣ безконечно удаленныя точки:

$$\infty = +\infty . \eta \text{ и } \infty' = +\infty . \eta',$$

гдѣ $+\infty$ есть безконечно большая *положительная* величина. Затѣмъ вообразимъ прямыя $\infty\eta$ и $\eta'\infty'$. Присоединивъ эти прямыя къ кривой $\eta\gamma\gamma'\eta'$, получимъ линiю $\infty\eta\gamma\gamma'\eta'\infty'$. Обозначивъ эту линiю чрезъ S и принявъ ее за путь интегрированiя, положимъ:

$$j_k = \int\limits_{(S)} e^{-my^\nu}\, y^{\beta+k-1}\, dy.$$

Будемъ имѣть:

$$\mathfrak{J}_k = \frac{u_k . \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right)}{\nu . m^{\frac{\beta+k}{\nu}}},$$

$$J_k = \frac{u_k . \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right)}{\nu . m^{\frac{\beta+k}{\nu}}} + \delta_k, \qquad (202_6)$$

гдѣ u_k опредѣляется равенствомъ (196′) и

$$\delta_k = \int\limits_{(\eta' \infty')} e^{-my^\nu} y^{\beta+k-1} dy - \int\limits_{(\eta \infty)} e^{-my^\nu} y^{\beta+k-1} dy. \qquad (202_7)$$

Это количество δ_k есть погрѣшность приближеннаго выраженія интеграла J_k, опредѣляемаго равенствомъ (202_6). Преобразованія перемѣннаго y въ интегралахъ, стоящихъ во второй части равенства (202_7), при помощи соотвѣтствующихъ формулъ:

$$y = \eta' . u^{\frac{1}{\nu}} \text{ и } y = \eta . u^{\frac{1}{\nu}} \qquad (202'_7)$$

приводятъ равенство (202_7) къ виду:

$$\delta_k = \frac{1}{\nu}\int\limits_1^{+\infty} \{\eta'^{\beta+k} e^{-m\eta'^\nu u} - \eta^{\beta+k} e^{-m\eta^\nu u}\} u^{\frac{\beta+k-\nu}{\nu}} du.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$|\delta_k| < \frac{\mu_k}{\nu}\int\limits_1^{+\infty} \left(e^{-mx_0 u} + e^{-mx'_0 u}\right) u^{\frac{\beta'+k-\nu}{\nu}} du, \qquad (202_8)$$

гдѣ β', x_0 и x'_0 суть дѣйствительныя части количествъ: β, η^ν и η'^ν и μ_k есть *наибольшій* изъ модулей количествъ:

$$\eta^{\beta+k} \text{ и } \eta'^{\beta+k}.$$

(202_9) и (202_{10}). Изъ равенства (203_1) и неравенствъ (203_4) и (203_5) слѣдуетъ, что

$$\rho_s = \frac{\lambda . r . N . M^s \Gamma\left(\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{\nu . s . m^{\frac{\beta'+s}{\nu}}} \left\{ \frac{x_0^{-\frac{\beta'+s}{\nu}} |\eta^{\beta+s}|}{1 - |\eta| . M} + \frac{x'^{-\frac{\beta'+s}{\nu}}_0 |\eta'^{\beta+s}|}{1 - |\eta'| . M} \right\}, \tag{203_6}$$

$$|\lambda| < 1.$$

n^0 31. Примѣняя къ вычисленію интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ второе изъ преобразованій (172), будемъ имѣть:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\ (1 - y^\nu). \tag{204}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенства (187) и (193) получатъ видъ:

$$J_k = \int\limits_{(\eta\gamma\gamma'\eta')} (1 - y^\nu)^m\, y^{\beta+k-1}\, dy, \tag{205}$$

$$\rho_s = \lambda . \frac{r}{s} . \frac{N . M^s \Phi(\eta)}{1 - \eta^\nu M^\nu} . \int\limits_0^\eta (1 - y^\nu)^m\, y^{\beta'+s-1}\, dy =$$

$$= \lambda . \theta . \frac{r}{s} . \frac{N . M^s \Phi(\eta) \Gamma(1+m) \Gamma\left(\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{(1 - \eta^\nu M^\nu)\ \nu . \Gamma\left(1 + \frac{\beta'+s}{\nu} + m\right)}, \tag{206}$$

$$|\lambda| < 1,\ 0 < \theta < 1,\ \beta'+s > 0.$$

Обозначимъ путь $\eta\,\gamma\,\gamma'\,\eta'$ въ предѣлѣ, когда $\eta = 1$ и $\eta' = e^{2\Omega i}$, чрезъ S и положимъ:

$$j_k = \int\limits_{(S)} (1 - y^\nu)^m\, y^{\beta+k-1}\, dy =$$

$$= \frac{u_k \Gamma(1+m)\, \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right)}{\nu . \Gamma\left(1 + \frac{\beta+k}{\nu} + m\right)}, \tag{207}$$

гдѣ u_k опредѣляется равенствомъ (196'). Легко убѣдиться, что интегралъ J_k вида (205) приводится къ виду:

$$J_k = j_k + u_k \delta'_k\,, \tag{208}$$

гдѣ интегралъ j_k, опредѣляемый равенствомъ (207), есть приближенная величина интеграла J_k, а $u_k\,\delta'_k$ есть погрѣшность этой величины, при чемъ величина δ'_k представляется при условіи (173) такъ:

$$\delta'_k = -\int_\eta^1 (1-y^\nu)^m y^{\beta+k-1}\,dy. \tag{209}$$

Для полученія предѣловъ величины δ'_k при дѣйствительномъ β можемъ въ интегралѣ (209) положить: $y^\nu = u$ и послѣ преобразованія этого интеграла воспользоваться формулой вида (118). Такимъ образомъ найдемъ:

$$\delta'_k = \frac{-(1-\eta^\nu)^{m+1}}{\nu\,(m+1)} \left\{\eta^\nu + (1-\eta^\nu)\,\theta_k\right\}^{\frac{\beta+k-\nu}{\nu}},\quad 0<\theta_k<1. \tag{210}$$

При мнимомъ β изъ равенства (209) слѣдуетъ, что

$$\delta'_k = \lambda \int_\eta^1 (1-y^\nu)^m y^{\beta'+k-1}\,dy,\quad |\lambda|<1, \tag{211}$$

гдѣ β' есть дѣйствительная часть β. Затѣмъ къ интегралу, входящему въ формулу (211), по преобразованіи перемѣннаго y при помощи уравненія $y^\nu = u$, можемъ опять примѣнить формулу вида (118). Таким образомъ найдемъ:

$$\delta'_k = \frac{\lambda_k (1-\eta^\nu)^{m+1}}{\nu.(m+1)} \left\{\eta^\nu + (1-\eta^\nu)\theta_k\right\}^{\frac{\beta'+k-\nu}{\nu}}, \tag{212}$$

$$|\lambda_k| < 1,\quad 0<\theta_k<1.$$

Равенство (185) при помощи равенствъ (207) и (208) приводятся къ виду:

$$[\xi' z' z'' \xi''] = \psi^m(\zeta) \left\{ H(\zeta) \frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{\beta}{\nu}\right) u_0}{\nu.\Gamma\left(1+\frac{\beta}{\nu}+m\right)} \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{1}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}} \cdot \frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right) u_k}{\nu.\Gamma\left(1+\frac{\beta+k}{\nu}+m\right)}$$

$$\left. + \Delta_s \right\}, \tag{213}$$

гдѣ количества $\Theta(\zeta)$, $H(\zeta)$ и u_k опредѣляются равенствами (178'), (181) и (196') и погрѣшность Δ_s представляется такъ:

$$\Delta_s = \rho_s + H(\zeta)\,\delta_0' u_0 + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{\delta'_k u_k}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}, \tag{214}$$

при чемъ предѣлы количествъ ρ_s и δ'_k опредѣляются при помощи соотвѣтствующихъ изъ формулъ (206), (210) и (212).

n^0 32. Примѣняя къ вычисленію интеграла $[\xi' z' z'' \xi'']$ третье изъ преобразованій (172), будемъ имѣть:

$$\psi(z) = \frac{\psi(\zeta)}{1+y^\nu}. \tag{215}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенства (187) и (193) получаютъ видъ:

$$J_k = \int_{(\eta\eta'\eta')} \frac{y^{\beta+k-1}\,dy}{(1+y^\nu)^m} \tag{216}$$

$$\rho_s = \lambda.\frac{r}{s}\cdot\frac{N.M^s\Phi(\eta)}{1-\eta^\nu M^\nu}\cdot\int_0^\eta \frac{y^{\beta'+s-1}\,dy}{(1+y^\nu)^m} =$$

$$= \lambda\theta\frac{r}{s}\cdot\frac{N.M^s\Phi(\eta)\Gamma\left(\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{1-\eta^\nu M^\nu}\cdot\frac{\Gamma\left(m-\frac{\beta'+s}{\nu}\right)}{\nu.\ \Gamma(m)}, \tag{217}$$

$$|\lambda| < 1,\ 0 < \theta < 1,\ \beta'+s > 0.$$

Обозначимъ путь $\eta\gamma\gamma'\eta'$ въ предѣлѣ, когда $\eta = +\infty$ и $\eta' = +\infty . e^{2\Omega i}$, чрезъ S и положимъ:

$$j_k = \int_{(S)} \frac{y^{\beta+k-1}\,dy}{(1+y^\nu)^m} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right)\Gamma\left(m-\frac{\beta+k}{\nu}\right)u_k}{\nu .\ \Gamma(m)}, \tag{218}$$

гдѣ u_k опредѣляется равенствомъ (196′).

Легко убѣдиться, что интегралъ J_k вида (216) представляется такъ:

$$J_k = j_k + \delta'_k . u_k, \tag{219}$$

гдѣ интегралъ j_k, опредѣляемый равенствомъ (218), есть приближенная величина интеграла J_k, а $\delta_k'.u_k$ есть погрѣшность этой величины, при чемъ количество δ'_k представляется при условіи (173) такъ:

$$\delta'_k = -\int^{\infty} \frac{y^{\beta+k-1}\,dy}{(1+y^\nu)^m}. \tag{220}$$

Для полученія предѣловъ величины δ'_k при дѣйствительномъ β можемъ примѣнить къ интегралу (220) формулу (2), при помощи которой найдемъ:

$$\delta'_k = -\left(\frac{y_k^\nu}{1+y_k^\nu}\right)^{\frac{\beta+k-\nu}{\nu}} \int_\eta^\infty \frac{y^{\nu-1}\,dy}{(1+y^\nu)^{m-\frac{\beta+k-\nu}{\nu}}}$$

$$= \left(\frac{y_k^\nu}{1+y_k^\nu}\right)^{\frac{\beta+k-\nu}{\nu}} . \frac{-1}{(m\nu-\beta-k)\,(1+\eta^\nu)^{m-\frac{\beta+k}{\nu}}}, \tag{221}$$

$$y_k > \eta.$$

Если количество β мнимое, то изъ равенства (220) слѣдуетъ, что

$$\delta'_k = \lambda \int_{\eta}^{\infty} \frac{y^{\beta'+k-1}\,dy}{(1+y^{\nu})^m}, \qquad |\lambda| < 1, \tag{222}$$

гдѣ β' есть дѣйствительная часть β. Входящій въ равенство (222) интегралъ допускаетъ такое примѣненіе формулы (2), которое сейчасъ было выполнено относительно интеграла (220) при дѣйствительномъ β. Повторяя это примѣненіе, найдемъ:

$$\delta'_k = \left(\frac{y_k^{\nu}}{1+y_k^{\nu}}\right)^{\frac{\beta'+k-\nu}{\nu}} \cdot \frac{\lambda_k}{(m\nu-\beta-k)(1+\eta^{\nu})^{m-\frac{\beta+k}{\nu}}}, \tag{223}$$

$$|\lambda_k| < 1.$$

Равенство (185) при помощи равенствъ (218) и (219) приводится къ виду:

$$[\xi'\gamma'\gamma''\xi''] = \psi^m(\zeta)\left\{H(\zeta)\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)\Gamma\left(m-\frac{\beta}{\nu}\right)u_0}{\nu\,\Gamma(m)} + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{k=s-1}\frac{1}{1.2...k}\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+k}{\nu}\right)\Gamma\left(m-\frac{\beta+k}{\nu}\right)u_k}{\nu\,\Gamma(m)}$$

$$\left. + \Delta_s \right\}, \tag{224}$$

гдѣ количества $\Theta(\zeta)$, $H(\zeta)$ и u_k опредѣляются равенствами (178), (181) и (196′) и погрѣшность Δ_s представляется такъ:

$$\Delta_s = \rho_s + H(\zeta)\delta_0'u_0 + \sum_{k=1}^{k=s-1}\frac{\delta'_k\,u_k}{1.2...k}\;\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}, \tag{225}$$

при чемъ предѣлы количествъ ρ_s и δ'_k опредѣляются при помощи соотвѣтствующихъ изъ формулъ (217), (221) и (223).

§ 10. Вычисленіе приближенныхъ выраженій производной $\Phi^{(m)}(x)$. Далекій членъ ряда Тейлора или Маклорена. Приближенное выраженіе функціи X_m Лежандра и изслѣдованіе погрѣшности этого выраженія. Перенесеніе построенія основного пути въ общемъ случаѣ на болѣе простыя модулярныя поверхности. Приближенное вычисленіе далекихъ членовъ ряда Лорана.

n^0 33. Предполагая, что функція $\Phi(x+z)$ голоморфная въ области точки $z=0$, имѣемъ:

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{1.2\ldots m}{2\pi i}\int_{(O)} \frac{\Phi(x+z)\,dz}{z^{m+1}}, \qquad (226)$$

гдѣ (O) есть замкнутый контуръ, окружающій въ положительномъ направленіи начало O координатъ и неокружающій особыхъ точекъ функціи $\Phi(x+z)$ перемѣннаго z.

Примѣняя къ интегралу (226) приближенное вычисленіе, должно положить:

$$\psi(z) = \frac{1}{z}. \qquad (227)$$

Модулярная поверхность, соотвѣтствующая указанной функціи $\psi(z)$, есть поверхность вращенія, круговыя сѣченія которой суть линіи уровня. Радіусы этихъ круговыхъ сѣченій *возрастаютъ* съ *пониженіемъ* уровня. Линіи, ортогональныя къ линіямъ уровня, представляются образующими этой поверхности вращенія и не могутъ имѣть кратныхъ точекъ. Проекціи ортогональныхъ линій на плоскость комплекснаго перемѣннаго z суть прямыя линіи, выходящія изъ начала O координатъ.

Разсматриваемая модулярная поверхность имѣетъ единственную вершину, поднимающуюся вверхъ до безконечности и соотвѣтствующую точкѣ $z=0$. Ортогональныя линіи нисходятъ отъ этой вершины, достигая низшаго уровня при $z=\infty$. Гибкая *растяжимая* замкнутая нить (O), изображающая на

модулярной поверхности путь интеграла (226), при сползанiи не будетъ встрѣчать иныхъ препятствiй, кромѣ иглъ, укрѣпленныхъ въ особыхъ точкахъ функцiи

$$f(z) = \frac{\Phi(x+z)}{z}. \qquad (228)$$

Первоначальное положенiе нити (O) изберемъ такое, чтобы при дальнѣйшей деформацiи не получалось лишнихъ ортогональныхъ вѣтвей, которыя потомъ пришлось бы сокращать. Такое положенiе представляется безконечно малою окружностью, которая лежитъ въ пересѣченiи модулярной поверхности съ безконечно высокою горизонтальною плоскостью. Такая окружность будетъ лежать выше всѣхъ особыхъ точекъ z функцiи $\Phi(x+z)$, принадлежа области, въ которой функцiя эта голоморфна. Пусть разсматриваемая нить (O), начиная отъ этого первоначальнаго положенiя, сползаетъ по ортогональнымъ направленiямъ, подчиняясь указаннымъ въ n^0 24 деформацiямъ при встрѣчѣ съ иглами, укрѣпленными въ особыхъ точкахъ z функцiи $\Phi(x+z)$, и образуя вблизи этихъ точекъ петли, которыя въ данномъ случаѣ будутъ представлять полные обходы и образуютъ сомкнутыя звенья того вида, какой изображенъ на фигурѣ 2.

Въ результатѣ такой деформацiи получится основной путь Λ, форма котораго вообще будетъ зависѣть отъ высоты R_0 уровня L, ниже котораго не могутъ сползать точки движущейся нити. Этотъ уровень L необходимо взять ниже особыхъ точекъ, занимающихъ самое высокое положенiе на модулярной поверхности и представляющихъ собою главныя точки, а также ниже точекъ подглавныхъ.

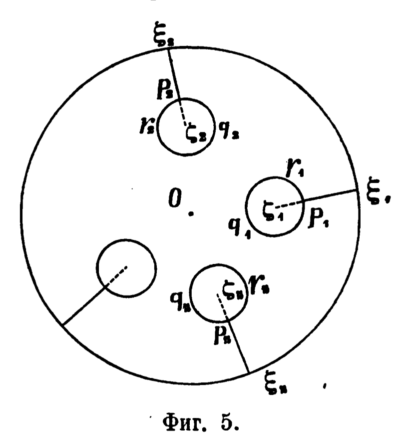
Ортогональный основной путь Λ, въ которомъ выше уровня L лежатъ лишь главныя и подглавныя точки, а остальныя особыя точки z функцiи $\Phi(x+z)$ лежатъ ниже этого уровня, обозначимъ чрезъ Λ' (на такомъ пути нѣтъ нормальныхъ точекъ). Въ томъ же случаѣ, когда уровень L понижается такъ, что надъ этимъ уровнемъ могутъ оказаться нормальныя точки и другiя

особыя точки z функціи $\Phi(x+z)$, кромѣ главныхъ и подглавныхъ, ортогональный основной путь Λ обозначимъ чрезъ Λ''.

Послѣдующія построенія будемъ разсматривать въ проекціяхъ на плоскость комплекснаго перемѣннаго z.

Опишемъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго z изъ центра O окружность C, проходящую чрезъ *ближайшую* къ O особую точку ζ_1 функціи $zf(z)=\Phi(x+z)$ и ограничивающую кругъ сходимости разложенія функціи $\Phi(x+z)$ въ рядъ Тейлора по степенямъ z. Главныя точки основного пути, эквивалентнаго пути (O) интегрированія, совпадаютъ съ особыми точками функціи $zf(z)=\Phi(x+z)$, лежащими на окружности C. Подглавныя точки при данныхъ обстоятельствахъ возможны лишь въ томъ случаѣ, если функція $zf(z)$ зависитъ отъ измѣняющихся параметровъ и имѣетъ особыя точки, лежащія *внѣ* окружности C и стремящіяся въ предѣлѣ вступить на эту окружность. Будемъ въ такомъ случаѣ подглавныя точки присоединять къ главнымъ, понимая ниже главныя точки въ *расширенномъ* смыслѣ.

Пусть проекціи на плоскость комплекснаго перемѣннаго z главныхъ точекъ будутъ: $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ (см. фиг. 5). Пусть эти точки слѣдуютъ другъ за другомъ въ порядкѣ возрастанія ихъ амплитудъ, начиная отъ амплитуды величины ζ_1. Окружимъ точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ безконечно малыми окружностями $p_1q_1r_1p_1$, $p_2q_2r_2p_2, \ldots, p_nq_nr_np_n$ и опишемъ изъ центра O окружность S такъ, чтобы главныя точки ζ_1, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ и соотвѣтствующія окружности $p_1q_1r_1p_1$, $p_2q_2r_2p_2, \ldots$, $p_nq_nr_np_n$ лежали *внутри* окружности S, а остальныя особыя точки функціи $zf(z)=$ $=\Phi(x+z)$ размѣщались *внѣ* окружности S. Радіусъ окружности S, которая на фигурѣ 5 изображена кривою $\xi_1\xi_2\xi_n$,



Фиг. 5.

обозначимъ чрезъ r. Эта окружность S представляетъ проекцію линіи уровня, лежащей въ упомянутой выше плоскости L. Высота R_0 этого уровня будетъ: $R_0 = |\psi(r)| = \frac{1}{r}$. По условію построенія окружности S будемъ имѣть:

$$r > \rho, \tag{229}$$

гдѣ ρ есть радіусъ вышеуказанной окружности C. Проведемъ прямыя $p_1\xi_1, p_2\xi_2, \ldots, p_n\xi_n$, представляющія кратчайшія разстоянія каждой изъ окружностей $p_1q_1r_1p_1$ $p_2q_2r_2p_2, \ldots, p_nq_nr_np_n$ отъ окружности S. Очевидно, за проекцію ортогональнаго основного пути Λ' можемъ принять замкнутую кривую $\xi_1p_1q_1r_1p_1\xi_1\xi_2p_2q_2r_2p_2\xi_2' \ldots \xi_np_nq_nr_np_n\xi_n\xi_1$, слагающуюся изъ слѣдующихъ частей: 1) прямой ξ_1p_1, 2) окружности $p_1q_1r_1p_1$, 3) прямой $p_1\xi_1$, 4) дуги $\xi_1\xi_2$ окружности S, 5) прямой ξ_2p_2, 6) окружности $p_2q_2r_2p_2$, 7) прямой $p_2\xi_2, \ldots$ Количества K_1 и K_2 для найденнаго основного пути, разсматриваемаго въ предѣлѣ, когда радіусы окружностей $p_1q_1r_1p, p_2q_2r_2p_2, \ldots, p_nq_nr_np_n$ стремятся къ нулю, будутъ:

$$K_1 = |\psi(\zeta_1)| = \frac{1}{\rho}, \tag{230}$$

$$K_2 = R_0 = |\psi(\xi_1)| = \frac{1}{r}. \tag{231}$$

Найденный основной путь Λ' примѣчателенъ въ томъ отношеніи, что на всемъ протяженіи его не можетъ быть другихъ особыхъ точекъ интегрируемой функціи, кромѣ главныхъ и подглавныхъ. Это свойство пути Λ' имѣетъ важное значеніе.

Очевидно, разсматриваемый основной путь Λ' подраздѣляется на такія звенья перваго рода, кои удовлетворяютъ условіямъ теоремъ I—VI. При этомъ по отдѣленіи второстепенныхъ частей основного пути Λ', совпадающихъ съ окружностью S, получаются нормальныя звенья второго рода, принадлежащія къ сомкнутымъ, кои изображены на фигурѣ 2.

Указанныя свойства, принадлежащія кривой Λ', разсматриваемый основной путь Λ сохраняетъ до тѣхъ поръ, пока окружность S, съ возрастаніемъ ея радіуса r, не достигнетъ ближайшей къ началу O особой точки z функціи $\Phi(x+z)$, не совпадающей съ главными и подглавными точками. Обозначимъ это предѣльное значеніе r чрезъ r_1. Если $r_1 = \infty$, т. е. если функція $\Phi(x+z)$ въ конечной области не имѣетъ другихъ особыхъ точекъ, кромѣ главныхъ и подглавныхъ, то путь Λ всегда обладаетъ свойствами кривой Λ'.

Но предположимъ, что количество r_1 конечное. Пока $r \leqq r_1$, основной путь Λ обладаетъ свойствами пути Λ' и притомъ имѣетъ силу равенство $R_0 = K_2$. Но если r увеличится такъ, что будемъ имѣть: $r > r_1$, то, кромѣ главныхъ и подглавныхъ точекъ, выше уровня L окажутся другія особыя точки z функціи $\Phi(x+z)$, около которыхъ образуются новыя петли и нисходящія отъ нихъ ортогональныя вѣтви, кои войдутъ въ составъ основного пути Λ, при чемъ такой путь выше былъ обозначенъ чрезъ Λ''. Изъ правила для опредѣленія величины K_2 видно, что наивысшія изъ этихъ послѣднихъ особыхъ точекъ (одна или болѣе) будутъ представлять собою *нормальныя* точки (см. n^0 25) и должны лежать въ уровнѣ L_2, разстояніе котораго отъ плоскости комплекснаго перемѣннаго представитъ *нормальное значеніе* величины K_2. Слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$K_2 = |\psi(r_1)| = \frac{1}{r_1} \tag{231'}$$

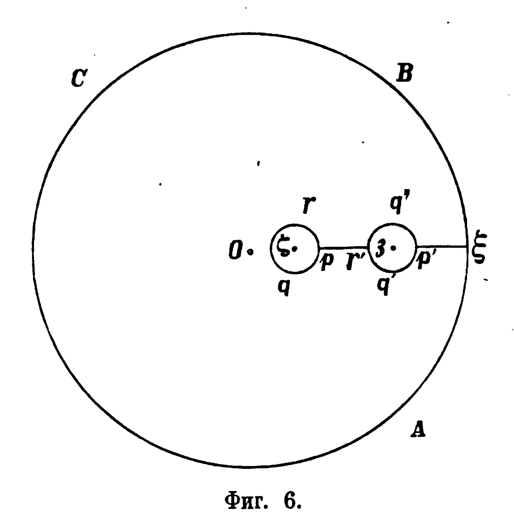
и притомъ, очевидно,

$$K_2 > R_0 = \frac{1}{r}\,. \tag{231''}$$

Итакъ, величина K_2, соотвѣтствующая разсматриваемому основному пути Λ'', представляетъ *нормальное* значеніе количества K_2, опредѣляемое при помощи равенства (231'). Вмѣстѣ съ тѣмъ вышеупомянутыя особыя точки z функціи $\Phi(x+z)$, кои лежатъ въ плоскости уровня L_2, высота котораго предста-

вляется нормальнымъ значенiемъ K_2, суть *нормальныя точки* основного пути Λ''.

Разсматривая эти точки, замѣчаемъ, что нормальная точка $\mathfrak{z}$ будетъ *подобною главной*, если на прямолинейномъ отрѣзкѣ $O\mathfrak{z}$ нѣтъ главной или подглавной точки, при чемъ этой точкѣ будетъ соотвѣтствовать петля, обратившаяся въ точку, и такая часть пути Λ'', которая подобна звену второго рода, изображенному на фигурѣ 2. Если же на отрѣзкѣ $O\mathfrak{z}$ лежитъ главная или подглавная точка ζ, то точка $\mathfrak{z}$ будетъ *существенно нормальною*. Форма проекцiи основного пути Λ'', имѣющаго существенно нормальную точку $\mathfrak{z}$, изображена на фигурѣ 6 кри-



Фиг. 6.

вою $A\xi p'q'r'pqrpr'q''p'\xi\ BCA$, въ которой петли, образуемыя вблизи точекъ $\mathfrak{z}$ и ζ, представлены дугами $p'q'r'$, $pqrp$ и $r'q''p'$.

Если для нормальнаго значенiя K_2 отношенiе $K_2 : K_1$ стремится по какой либо причинѣ къ 1, то нормальныя точки, подобныя главнымъ, могутъ быть приняты за подглавныя точки, а существенно нормальныя точки приведутъ къ существенно особому случаю перваго рода (см. n^0 21) или, иначе, къ особому случаю второго рода (см. n^0 22).

Разсмотрѣвъ построенiе основного пути Λ, обратимъ вниманiе на одинъ курьезъ. Казалось бы, наиболѣе простой слу-

чай въ нашей задачѣ тотъ, когда функція $\Phi(x+z)$ *голоморфная во всей конечной области плоскости комплекснаго перемѣннаго* z. Между тѣмъ этотъ случай представляетъ затрудненіе вслѣдствіе невозможности осуществить описанное выше построеніе основного пути Λ, которое основано на предположеніи, что функція $\Phi(x+z)$ имѣетъ особыя точки въ конечной части плоскости комплекснаго перемѣннаго. Для выхода изъ этого затрудненія остается лишь осложнить выборъ функціи $\psi(z)$ въ интегралѣ (226). Съ этою цѣлью можемъ, напримѣръ, положить

$$\psi(z) = \frac{\{\Phi(x+z)\}^{\frac{1}{m}}}{z},$$

при чемъ задача приведется къ приближенному вычисленію интеграла:

$$\int\limits_{(0)} \psi^m(z) \frac{dz}{z}.$$

Устраняя изъ разсмотрѣнія этотъ исключительный случай, перейдемъ къ вычисленію интеграла (226), отнеся его къ вышеуказанному ортогональному пути Λ', т. е. полагая:

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{1.2\ldots m}{2\pi i} \int\limits_{(\Lambda')} \frac{\Phi(x+z)}{z^{m+1}} dz. \tag{232}$$

Очевидно, интегралъ (232) распадается на сумму интеграловъ, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ звеньямъ *перваго* рода, на которыя раздѣляется путь Λ'. Къ каждому интегралу, входящему въ эту сумму слагаемымъ, примѣнима теорема V, если выраженіе:

$$\left(K_2 : K_1\right)^m = \left(\frac{\rho}{r}\right) \tag{232'}$$

удовлетворяетъ первому главному условію ($n^o 4$) и если не имѣетъ мѣста особый случай второго рода. Если при этомъ функція

$\Phi(x+z)$ обращается для главной точки $z=\zeta$ въ безпечность порядка не ниже 1 относительно $\frac{1}{z-\zeta}$, то прежде примѣненія теоремы V нужно воспользоваться пріемомъ, указаннымъ въ n^0 15.

Но въ данномъ случаѣ вообще удобнѣе воспользоваться звеньями *второго рода* и относящимися къ нимъ формулами, указанными въ § 9, вмѣстѣ съ пріемомъ, основаннымъ на отдѣленіи второстепенныхъ частей основного пути Λ', каковыя части совпадаютъ съ дугами окружности S. Примѣняя этотъ пріемъ, находимъ:

$$\Phi^{(m)}(x)=\sum_{k=1}^{k=n}\{[\xi_k p_k q_k r_k p_k \xi_k]+[\xi_k\xi_{k+1}]\},\quad \xi_{n+1}=\xi_1, \tag{233}$$

гдѣ вообще

$$[abc]=\frac{1.2\ldots m}{2\pi i}\int\limits_{(abc)}\frac{\Phi(x+z)}{z^{m+1}}\,dz. \tag{234}$$

Прежде всего замѣтимъ, что дуги $\xi_1\xi_2$, $\xi_2\xi_3,\ldots$, $\xi_n\xi_1$ окружности S представляютъ совокупность второстепенныхъ частей звеньевъ основного пути Λ, къ которымъ примѣняются замѣчанія, указанныя въ n^0 10 (пункт. I). Сумма интеграловъ вида (234), отнесенныхъ къ этимъ частямъ, представляется такъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n}[\xi_k\xi_{k+1}]=\lambda.1.2\ldots m.2\pi\rho\mu\,\psi^m(\zeta_1).\left(\frac{r}{\rho}\right)^m,\ |\lambda|<1, \tag{235}$$

гдѣ μ есть maximum maximorum модуля функціи $\Phi(x+re^{\omega i})$ при возрастаніи ω отъ 0 до 2π. Эта сумма не повліяетъ на искомую приближенную величину и лишь войдетъ въ составъ ея погрѣшности.

Затѣмъ перейдемъ къ интеграламъ $[\xi_k p_k q_k r_k p_k \xi_k]$, входящимъ въ равенство (233).

Интегралъ $[\xi pqrp\xi]$ этого вида отнесенъ къ звену $\xi pqrp\xi$ второго рода, каковыя звенья и соотвѣтствующіе имъ интегралы разсмотрѣны были въ § 9. Звено $\xi pqrp\xi$ сомкнутое, при чемъ

для него величина Ω, опредѣляемая равенствомъ вида (165), пріобрѣтаетъ въ данномъ случаѣ значеніе:

$$\Omega = -\pi. \tag{236}$$

Примѣненіе къ интегралу [$\xi pqrp\xi$] формулъ, данныхъ въ § 9, возможно лишь въ томъ случаѣ, если функцію $f(z) = z^{-1}\,\Phi(x+z)$ въ области главной точки $z=\zeta$ можно представить такъ:

$$\frac{\Phi(x+z)}{z} = (z-\zeta)^{\beta_1-1}\,\phi_1(z) + (z-\zeta)^{\beta_2-1}\,\phi_2(z) + \ldots, \tag{237}$$

гдѣ $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$,... суть функціи голоморфныя въ области точки $z=\zeta$ и не обращающіяся въ нуль при $z=\zeta$. Эти формулы примѣняются къ отдѣльнымъ членамъ второй части равенства (237). При этомъ можемъ опустить во второй части равенства (237) членъ, соотвѣтствующій цѣлому положительному значенію β, а если во второй части равенства (237) окажется членъ съ цѣлымъ отрицательнымъ значеніемъ β, то интегралъ, соотвѣтствующій такому члену, получается при помощи интегральныхъ вычетовъ.

Интегралы, соотвѣтствующіе членамъ второй части равенства (237), коимъ соотвѣтствуютъ дробныя или мнимыя значенія β, вычисляются при помощи любой изъ формулъ (202), (213) и (224), полагая въ нихъ $\nu = 1$ и опредѣляя Ω при помощи равенства (236). Формулы эти, благодаря виду функціи $\psi(z)$, опредѣляемой равенствомъ (227), въ данномъ случаѣ болѣе всего соотвѣтствуютъ примѣненію ряда Маклорена, а не ряда Лагранжа, умѣстнаго лишь при болѣе сложномъ составѣ функціи $\psi(z)$, когда нужно имѣть дѣло съ алгебрическими трудностями при рѣшеніи уравненія, связывающаго перемѣнныя.

Въ заключеніе сдѣлаемъ нѣсколько общихъ замѣчаній по поводу важнаго значенія рѣшаемой по вышеуказанному плану задачи о приближенномъ вычисленіи производной $\Phi^{(m)}(x)$ въ различныхъ вопросахъ математическаго анализа и его приложеній.

Существуетъ множество такъ называемыхъ *спеціальныхъ* функцій, къ которымъ принадлежатъ функціи Лежандра, Чебышева

и пр. и которыя выражаются производными вида $\Phi^{(m)}(x)$. Сюда принадлежатъ функціи тригонометрическія, напримѣръ,

$$\cos m\varphi = \frac{2^{m-1}\,\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} \sqrt{u^2-1}\; \frac{d^m\,(u^2-1)^{m-\frac{1}{2}}}{du^m}\,,\quad u=\cos\varphi,$$

и вообще полиномы, представляющіеся такъ:

$$\varphi_m(u) = \frac{C.(u-a)^{-\lambda}\,(u-b)^{-\mu}}{1.2\ldots m}\; \frac{d^m\,\{(u-a)^{\lambda+m}\,(u-b)^{\mu+m}\}}{du^m}\,, \tag{237$_1$}$$

гдѣ C есть постоянное количество. Чтобы выразить функцію $\varphi_m(u)$ посредствомъ производной вышеуказаннаго вида $\Phi^{(m)}(x)$, разсмотримъ уравненіе

$$w - u = \frac{1}{2}\,z\,(w-a)\,(w-b) \tag{237$_2$}$$

и разложимъ опредѣляемую при посредствѣ этого уравненія функцію

$$\Phi(z) = (w-a)^{\lambda}\,(w-b)^{\mu}\,\frac{dw}{du} \tag{237$_3$}$$

въ рядъ по степенямъ z, разумѣя подъ w тотъ корень уравненія (237_2), который при $z=0$ обращается въ $w=u$. Разложеніе это получается при помощи формулы Лагранжа и показываетъ, что коеффиціентъ при z^m въ этомъ разложеніи совпадаетъ съ выраженіемъ

$$\frac{2^m.(u-a)^{\lambda}\,(u-b)^{\mu}}{C}\,\varphi_m(u).$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\varphi_m(u) = \frac{C\,(u-a)^{-\lambda}\,(u-b)^{-\mu}}{2^m.1.2\ldots m}\,\Phi^{(m)}(0), \tag{237$_4$}$$

при чемъ функція $\Phi(z)$, опредѣляемая уравненіями (237_2) и (237_3), выражается такъ:

$$\Phi(z) = \frac{2\,(w-a)^{\lambda}\,(w-b)^{\mu}}{\sqrt{(a-b)^2z^2 - 4\,(2u-a-b)\,z + 4}}\,, \tag{237$_5$}$$

$$w = \frac{2 + (a+b)\,z - \sqrt{(a-b)^2z^2 - 4\,(2u-a-b)\,z + 4}}{2z}. \tag{237$_6$}$$

Эти функціи $\varphi_m(u)$ играютъ весьма важную роль при рѣшеніи вопросовъ о приближенномъ вычисленіи интеграловъ [1]), а также при разсмотрѣніи различныхъ разложеній, употребляемыхъ въ механикѣ и математической физикѣ. При большомъ m приближенныя выраженія такихъ специальныхъ функцій, получаемыя по вышеуказанному плану, сопровождаются оцѣнкою погрѣшностей, которую не могли дѣлать прежніе авторы. Вычисленія этого рода выполнены ниже (въ n^0 34) со всею подробностію въ примѣненіи къ функціи X_m Лежандра, въ которую переходитъ функція $\varphi_m(u)$ при $\lambda = \mu = 0$ послѣ замѣны перемѣннаго u помощію уравненія:

$$u = \frac{1}{2}\{(a - b)x + a + b\}.$$

Обратимъ еще вниманіе на нижеслѣдующее.

Имѣя способы приближеннаго вычисленія производной $\Phi^{(m)}(x)$, мы можемъ получать приближенныя выраженія далекихъ членовъ ряда Тейлора, представляющаго функцію $\Phi(x + z)$, а при $x = 0$ ряда Маклорена, опредѣляющаго функцію $\Phi(z)$. Эти приближенныя выраженія играютъ важную роль 1) при изслѣдованіи условій сходимости этихъ рядовъ на самыхъ окружностяхъ круговъ сходимости и 2) при изысканіи способовъ для облегченія вычисленія суммы этихъ рядовъ.

Второго вопроса мы коснемся ниже (въ n^0 39, пункт. I).

Чтò касается перваго вопроса, то приближенное выраженіе далекаго члена

$$u_m = \frac{\Phi^{(m)}(x).z^m}{1.2\ldots m} \qquad (237_1)$$

ряда Тейлора, представляющаго функцію $\Phi(x + z)$, даетъ возможность примѣнить къ этому ряду обычные признаки сходимости рядовъ. Такъ, если для каждой главной точки z основного пути Λ функція $z^{-1}\Phi(x + z)$ представляется въ формѣ (237) и если α есть *наименьшая* изъ дѣйствительныхъ частей всѣхъ

[1]) *Н. Я. Сонинъ*, „О приближенныхъ вычисленіяхъ опредѣленныхъ интеграловъ". Университетскія Извѣстія. Варшава. 1887.

показателей β для всѣхъ главныхъ точекъ, то приближенное выраженіе указаннаго члена u_m, опредѣляемаго равенствомъ (237_7), при положеніи точки z *на самой окружности* C круга сходимости должно имѣть форму:

$$u_m = \frac{A_m}{m^\alpha}, \qquad (237_8)$$

гдѣ A_m есть количество, модуль котораго при неограниченномъ возрастаніи m не выходитъ изъ конечныхъ предѣловъ. Изъ равенства (237_8) видно, что рядъ Тейлора при разсматриваемыхъ условіяхъ для всѣхъ точекъ z окружности C круга его сходимости будетъ сходящимся, если $\alpha > 1$, и будетъ расходящимся, если $\alpha < 0$; если же $0 < \alpha \leqq 1$, то сходимость разсматриваемаго ряда будетъ зависѣть отъ амплитуды количества A_m, при чемъ рядъ будетъ непремѣнно расходящимся для тѣхъ главчыхъ точекъ основного пути Λ, для которыхъ въ разложеніи (237) дѣйствительная часть какого либо изъ показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots$ совпадаетъ съ α. Заключенія эти легко провѣрить ля функціи

$$\Phi(x+z) = (1-z)^{\beta-1}.$$

n^0 34. Въ видѣ примѣра разсмотримъ здѣсь со всею полнотою выводъ приближеннаго выраженія функціи Лежандра:

$$X_m = \frac{1}{2^m.1.2\ldots m} \cdot \frac{d^m\{(x^2-1)^m\}}{dx^m}, \qquad (238)$$

считая m числомъ весьма большимъ. При этомъ постараемся не только получить искомое приближенное выраженіе, но, и составить формулы для опредѣленія предѣловъ его погрѣшности. Такихъ формулъ нѣтъ въ мемуарѣ Дарбу [1]) и не встрѣчается у другихъ извѣстныхъ мнѣ авторовъ, касавшихся этого вопроса. Между тѣмъ безъ болѣе обстоятельнаго прибли-

---

[1]) Примѣняя къ приближенному вычисленію функціи X_m свой способъ Дарбу ограничивается лишь указаніемъ порядка малой погрѣшности (см Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3—me série, t. IV, p. 39. 1878). Принципъ Дарбу и не можетъ идти далѣе этого въ оцѣнкѣ погрѣшностей приближенныхъ выраженій.

женнаго вычисленія функціи X_m не можетъ обойтись теорія разложеній по функціямъ X_m, такъ какъ на такомъ вычисленіи основываются: 1) опредѣленіе предѣловъ дополнительнаго члена каждаго изъ такихъ разложеній и 2) облегченіе вычисленія безконечныхъ рядовъ, представляемыхъ этими разложеніями (см. n° 38.).

Какъ извѣстно, функція X_m есть коеффиціентъ при z^m въ разложеніи функціи

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

по степенямъ z, т. е.

$$X_m = \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}. \tag{238'}$$

Имѣя это въ виду, примѣнимъ къ данному случаю изложенный въ n° 33 пріемъ, согласно которому будемъ имѣть:

$$X_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(O)} \frac{z^{-m-1}\,dz}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}, \tag{239}$$

гдѣ путь (O) интегрированія есть весьма малая замкнутая кривая, описанная около начала O координатъ и проходимая при интегрированіи въ положительномъ направленіи. Въ этомъ случаѣ

$$\psi(z) = z^{-1} \text{ и } f(z) = \frac{z^{-1}}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \frac{z^{-1}}{\sqrt{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)}}.$$

Особыя точки интегрируемой функціи, не совпадающія съ началомъ O координатъ, будутъ соотвѣтствовать двумъ количествамъ:

$$\zeta_1 = x + i\sqrt{1 - x^2} = e^{\varphi i} \text{ и } \zeta_2 = x - i\sqrt{1 - x^2} = e^{-\varphi i}. \tag{240}$$

Если x есть дѣйствительная величина, удовлетворяющая неравенствамъ:

$$-1 < x < +1, \tag{241}$$

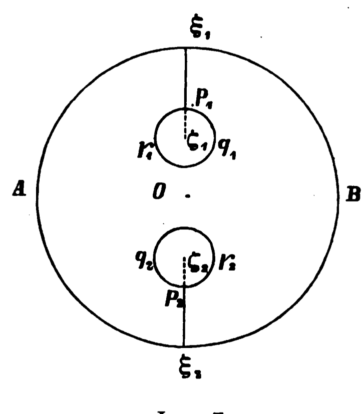
то количества ζ_1 и ζ_2 будутъ мнимыя сопряженныя, при чемъ соотвѣтствующія точки ζ_1 и ζ_2 будутъ одинаково отстоять отъ

начала и помѣстятся обѣ на окружности C, описанной изъ центра O радіусомъ $\rho=1$, т. е. обѣ онѣ будутъ главныя, при чемъ будемъ имѣть:

$$K_1 = |\psi(\zeta_1)| = |\psi(\zeta_2)| = 1.$$

Разсмотримъ сначала этотъ случай, изображенный на фигурѣ 7.

Опишемъ изъ центра O окружность S, которая на фигурѣ 7 представляется кривою $\xi_1 A \xi_2$ и радіусъ r которой пусть будетъ *весьма великъ* и въ предѣлѣ обращается *въ безконечность*. Проведемъ черезъ точки ζ_1 и ζ_2 прямыя $\zeta_1\xi_1$ и $\zeta_2\xi_2$, представляющія кратчайшія разстоянія этихъ точекъ отъ окружности S, и опишемъ около этихъ точекъ безконечно малыя окружности $p_1q_1r_1p_1$ и $p_2q_2r_2p_2$ (фиг. 7).



Фиг. 7.

Очевидно, путь

$$\xi_1 p_1 q_1 r_1 p_1 \xi_1 A \xi_2 p_2 q_2 r_2 p \xi_2 \xi_1,$$

который обозначимъ черезъ Λ, будетъ основной и притомъ ортогональный и будетъ эквивалентенъ данному пути (O). Для этого пути Λ имѣемъ: $K_1 = 1$ и $K_2 = \lim \frac{1}{r} = 0$. Въ виду указаннаго значенія величины K_2, которое въ данномъ случаѣ есть критическое, всѣ члены погрѣшности искомаго приближеннаго выраженія, принадлежащіе къ первому роду (см. n^0 11), уничтожаются.

Теперь легко опредѣлить приближенное выраженіе функціи X_m.

Обозначивъ звенья $\xi_1 p_1 q_1 r_1 p_1 \xi_1$ и $\xi_2 p_2 q_2 r_2 \xi_2$ основного пути Λ черезъ (ξ_1) и (ξ_2), можемъ интегралъ (239) разложить на слагаемыя соотвѣтственно частямъ пути Λ, именно:

$$X_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(\xi_1)} + \int_{(\xi_1 A \xi_2)} + \int_{(\xi_2)} + \int_{(\xi_2 B \xi_1)}\right\}, \quad (241')$$

гдѣ интегрируемая функція для краткости пропущена.

Въ области каждой изъ главныхъ точекъ ζ_1 и ζ_2, соотвѣтствующихъ звеньямъ (ξ_1) и (ξ_2), функція $f(z)$ приводится въ данномъ случаѣ къ виду (167), при чемъ показатель β опредѣляется такъ: $\beta = \frac{1}{2}$ и, слѣдовательно, удовлетворяетъ условію (174). Поэтому преобразованія (172) приводятъ каждый изъ интеграловъ:

$$\int_{(\xi_1)} \text{ и } \int_{(\xi_2)}$$

къ виду (175), въ которомъ при этомъ $\Omega = -\pi$. Примѣняя это замѣчаніе къ первому изъ указанныхъ интеграловъ и пользуясь замѣной перемѣннаго z при помощи второго изъ преобразованій (172), которое въ разсматриваемомъ случаѣ совпадаетъ также съ преобразованіемъ (110) (ибо $\nu=1$) и приводится къ виду [1]):

$$z = \frac{\zeta_1^{\,r}}{1-y},$$

находимъ:

$$\int_{(\xi_1)} = \frac{-2e^{-\left(m\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)i}}{\sqrt{2\sin\varphi}} \int_0^{\eta} \frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^m\,dy}{\left(1 - \frac{i\,e^{-\varphi i}}{2\sin\varphi}\,y\right)^{\frac{1}{2}}},$$

гдѣ

$$\eta = 1 - \frac{1}{r}.$$

Подобными пріемами найдемъ:

$$\int_{(\xi_2)} = \frac{2e^{\left(m\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)i}}{\sqrt{2\sin\varphi}} \int_0^{\eta} \frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^m\,dy}{\left(1 + \frac{i\,e^{\varphi i}}{2\sin\varphi}\,y\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

---

[1]) Съ равнымъ успѣхомъ мы могли бы воспользоваться здѣсь любымъ изъ преобразованій (172).

Полагая $r = \infty$, будемъ имѣть: $\eta = 1$,

$$X_m = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{(\xi_1)} + \int\limits_{(\xi_2)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi i\sqrt{2\sin\varphi}}\left\{e^{\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}\int\limits_0^1 \frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^m\,dy}{\left(1+\frac{i\,e^{\varphi i}}{2\sin\varphi}y\right)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left. - e^{-\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}i\right)}\int\limits_0^1 \frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^m\,dy}{\left(1-\frac{i\,e^{-\varphi i}}{2\sin\varphi}y\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad (242)$$

При разложеніи интеграловъ, стоящихъ во второй части равенства (242), воспользуемся рядомъ Маклорена и формами его дополнительнаго члена, указанными въ n^0 14. Положимъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{e^{\varphi i}}{2i\sin\varphi}, \quad b = \frac{1}{i}e^{\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}, \\ a' &= \frac{-e^{-\varphi i}}{2i\sin\varphi}, \quad b' = \frac{1}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (242')$$

Здѣсь a и a', b и b' суть количества попарно сопряженныя. Положимъ далѣе:

$$\mathcal{F}(y) = \frac{b}{(1-ay)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b'}{(1-a'y)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (243)$$

При этихъ обозначеніяхъ будемъ имѣть:

$$X_m = \frac{1}{\pi\sqrt{2\sin\varphi}}\int\limits_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^m\,\mathcal{F}(y)\,dy. \qquad (244)$$

Функція $\mathscr{F}(y)$, опредѣляемая равенствомъ (243) и входящая въ равенство (244), при дѣйствительномъ x, удовлетворяющемъ условіямъ (241), есть дѣйствительное количество. Поэтому для разложенія ея можемъ воспользоваться формулой:

$$\mathscr{F}(y) = \mathscr{F}(0) + \frac{y}{1}\mathscr{F}'(0) + \ldots + \frac{y^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}\mathscr{F}^{(s-1)}(0) + \qquad (245)$$

$$+ \frac{y^s}{1.2\ldots.s}\mathscr{F}^{(s)}(\theta y),$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Эта формула приводитъ равенство (244) къ виду:

$$X_m = \frac{1}{\pi\sqrt{2\sin\varphi}}\left\{\sum_{k=0}^{k=s-1}\frac{\mathscr{F}^{(k)}(0)}{1.2\ldots k}\cdot\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k+m\right)} + \Delta_s\right\}, \qquad (246)$$

гдѣ

$$\mathscr{F}^{(k)}(0) = 1.3.5\ldots(2k-1)\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^k b + \left(\frac{a'}{2}\right)^k b'\right\}, \qquad (247)$$

$$\Delta_s = \frac{1}{1.2.3\ldots s}\int_0^1 y^{s-\frac{1}{2}}(1-y)^m\mathscr{F}^{(s)}(\theta y)\,dy, \qquad (248)$$

при чемъ

$$\mathscr{F}^{(s)}(y) = 1.3\ldots.(2s-1)\left\{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^s b}{(1-ay)^{s+\frac{1}{2}}} + \frac{\left(\frac{a'}{2}\right)^s b'}{(1-a'y)^{s+\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad (249)$$

Равенство (248) при помощи формулы (2) приводится къ виду:

$$\Delta_s = \frac{\mathscr{F}^{(s)}(\varepsilon)}{1.2\ldots s}\int_0^1 y^{s-\frac{1}{2}}(1-y)^m\,dy,\quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Иначе:

$$\Delta_s = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+s+m\right)} \cdot \frac{\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)}{1.2\ldots s}. \qquad (250)$$

Это выраженіе погрѣшности Δ_s приближеннаго выраженія функціи X_m, опредѣляемаго по формулѣ (246), и есть искомое при вышеуказанныхъ условіяхъ относительно x. Порядокъ погрѣшности Δ_s относительно $\frac{1}{m}$ представляется числомъ $\sigma = \frac{1}{2}$. Чтобы имѣть высшій и низшій предѣлы, въ которыхъ колеблется погрѣшность Δ_s, нужно найти наибольшее и наименьшее изъ значеній функціи $\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)$ при измѣненіи ε отъ 0 до 1. При этомъ придется находить заключенные въ этихъ предѣлахъ дѣйствительные корни уравненія:

$$\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon) = 0. \qquad (250')$$

Это не представляетъ затрудненія, такъ какъ уравненіе (250′) легко разрѣшается при помощи элементарныхъ агебраическихъ пріемовъ. Пусть M_1 и M_2 будутъ найденныя такимъ образомъ наименьшее и наибольшее значенія функціи $\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)$ при возрастаніи ε отъ 0 до 1. Погрѣшность Δ_s, выраженная равенствомъ (250), должна удовлетворять неравенствамъ:

$$\frac{M_1}{1.2\ldots s} < \frac{\Delta_s \Gamma\left(\frac{3}{2}+s+m\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+m)} < \frac{M_2}{1.2\ldots s}. \qquad (250')$$

Займемся другимъ болѣе простымъ (хотя и болѣе грубымъ) способомъ опредѣленія высшаго предѣла абсолютной величины количества $\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)$ и погрѣшности Δ_s. Изъ равенства (249) легко усмотрѣть, что

$$|\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)| < \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2^{s-1}} \left| \frac{a^s b}{(1-a\varepsilon)^{s+\frac{1}{2}}} \right|.$$

Если μ есть наименьшее значеніе модуля выраженія

$$1 - a\varepsilon = 1 + \frac{ie^{\varphi i}}{2\sin\varphi}\cdot\varepsilon$$

при возрастаніи ε отъ 0 до 1, то

$$|\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)| < \frac{1.3.5.\ldots.(2s-1)}{2^{s-1}(2\sin\varphi)^s\mu^{s+\frac{1}{2}}}. \qquad (251)$$

Изысканіе указаннаго значенія μ приводитъ насъ къ слѣдующимъ выраженіямъ:

1) если $\sin^2\varphi \leqq \frac{1}{2}$, то

$$\mu^2 = \cos^2\varphi \geqq \frac{1}{2};$$

2) если же $\sin^2\varphi > \frac{1}{2}$, то

$$\mu^2 = \frac{1}{4\sin^2\varphi} \geqq \frac{1}{4}.$$

Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ

$$\mu \geqq \frac{1}{2},$$

при чемъ неравенство (251) можемъ замѣнить слѣдующимъ:

$$|\mathcal{F}^{(s)}(\varepsilon)| < \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2^{s-\frac{3}{2}}\sin^s\varphi}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ погрѣшность Δ_s представится такъ:

$$\Delta_s = \frac{\theta.\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+s+m\right)}\cdot\frac{2^{\frac{3}{2}}.1.3.5\ldots(2s-1)}{(2\sin\varphi)^s.1.2\ldots.s}, \qquad (252)$$

гдѣ

$$-1 < \theta < +1.$$

Итакъ, при условіяхъ (241) получаемъ слѣдующую формулу для вычисленія приближеннаго выраженія функціи X_m:

$$X_m = \frac{2\,\Gamma(1+m)}{\pi\sqrt{2\sin\varphi}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\cos\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}+\ldots\right.$$

$$+\frac{1.3\ldots(2k-1).\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left[\left(m+\frac{2k+1}{2}\right)\varphi-\frac{2k+1}{4}\pi\right]}{1.2\ldots k.(4\sin\varphi)^k.\Gamma\left(\frac{3}{2}+k+m\right)}$$

$$+\frac{1.3\ldots(2s-3).\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right).\cos\left[\left(m+\frac{2s-1}{2}\right)\varphi-\frac{2s-1}{4}\pi\right]}{1.2\ldots(s-1).(4\sin\varphi)^{s-1}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+m\right)}$$

$$\left.+\frac{\theta\sqrt{2}.1.3\ldots(2s-1)}{1.2\ldots s\,(2\sin\varphi)^s}\,\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+s+m\right)}\right\}, \qquad (253)$$

гдѣ φ опредѣляется изъ уравненій (240).

При $s=1$ формула (253) получаетъ видъ:

$$X_m = \frac{2\,\Gamma(1+m)}{\sqrt{2\pi\sin\varphi}\,.\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}\left\{\cos\left[\frac{2m+1}{2}\varphi-\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\theta}{\sqrt{2}\,(3+2m)\sin\varphi}\right\},\ -1<\theta<+1. \qquad (254)$$

Найденныя формулы для приближеннаго вычисленія функціи X_m, очевидно, становятся негодными въ предѣлѣ при $\varphi=0$, а также при $\varphi=\pi$ (т. е. при сліяніи двухъ главныхъ точекъ ζ_1 и ζ_2 основного пути Λ). Эти формулы оказываются неудобными даже при φ отличномъ отъ 0 или π, но близкомъ къ одной изъ этихъ

величинъ (т. е. для весьма близкихъ другъ къ другу точекъ ζ_1 и ζ_2). Очевидно, мы имѣемъ здѣсь дѣло съ *особымъ случаемъ второго рода* (см. *пп* °12 и 22). Такъ какъ при этомъ здѣсь представляется случай близости двухъ главныхъ точекъ, то по указанному въ *n*° 22 (пункт. III) плану мы можемъ въ этомъ случаѣ свести приближенное вычисленіе функціи X_m къ процессу, указанному въ *n*° 20. Этого вычисленія однако производить не будемъ.

Предположимъ затѣмъ, что x представляетъ собою количество *мнимое*. При этомъ условіи формула (246) сохранитъ свою силу лишь съ тѣмъ отличіемъ, что входящее во вторую часть равенства (246) количество Δ_s получитъ другое выраженіе. Въ самомъ дѣлѣ при мнимомъ x количества a и a', b и b', опредѣляемыя равенствами (242′), перестанутъ быть попарно сопряженными, и функція $\mathcal{f}(y)$, опредѣляемая равенствомъ (243), будетъ мнимымъ количествомъ, при чемъ равенство (245), какъ разъяснено въ *n*° 14, должно быть замѣнено слѣдующимъ

$$\mathcal{f}(y)=\mathcal{f}(0)+\frac{y}{1}\mathcal{f}'(0)+\ldots+\frac{y^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}\mathcal{f}^{(s-1)}(0)+$$

$$+\frac{\lambda y^s}{1.2\ldots s}\mathcal{f}^{(s)}(\theta y), \qquad (255)$$

$$|\lambda|<1,\ 0<\theta<1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ равенствъ (244) и (255) будетъ вытекать формула (246), въ которой погрѣшность Δ_s будетъ выражаться такъ:

$$\Delta_s=\frac{1}{1.2\ldots s}\int_0^1 y^{s-\frac{1}{2}}(1-y)^m\lambda\mathcal{f}^{(s)}(\theta y)\,dy=$$

$$=\frac{\lambda\mathcal{f}^{(s)}(\varepsilon)}{1.2\ldots s}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+s+m\right)},\ |\lambda|<1,\ 0<\varepsilon<1. \quad (256)$$

Отсюда при помощи равенства (249) легко найти высшій предѣлъ модуля погрѣшности Δ_8.

Замѣтимъ, что при мнимомъ x изъ двухъ особыхъ точекъ ζ_1 и ζ_2 главною будетъ лишь *одна*, ибо точки эти не будутъ равно отстоять отъ начала O. Свойства главной точки будутъ принадлежать лишь ближайшей изъ нихъ къ началу O, которую обозначимъ чрезъ ζ, а другую особую точку обозначимъ чрезъ ζ'. Такъ какъ $\zeta . \zeta' = 1$, то одна изъ этихъ точекъ (главная) должна лежать *внутри* окружности E, описанной изъ центра O радіусомъ, равнымъ 1, а другая (неглавная)—*внѣ*.

Пусть главная точка ζ приближается къ окружности E и стремится вступить на нее. При этомъ мнимый параметръ x стремится къ дѣйствительной величинѣ, заключенной между -1 и $+1$, и неглавная точка ζ' стремится вступить на окружность E и сдѣлаться главной. Такимъ образомъ, точка ζ' при разсматриваемыхъ условіяхъ имѣетъ характеръ *подглавной* точки, при чемъ формулы (246) и (256) опредѣляютъ приближенную величину функціи X_m и ея погрѣшность не только тогда, когда обѣ точки ζ_1 и ζ_2 главныя въ узкомъ смыслѣ, который установленъ въ n^0 3, но и тогда, когда одна изъ нихъ главная, а другая подглавная. На этомъ пунктѣ съ ясностью обнаруживаетъ свою неполноту принципъ Дарбу, о которомъ была рѣчь во введеніи и который не имѣетъ въ себѣ даже никакихъ намековъ на то, какимъ образомъ вычислять приближенную величину интеграла, если присутствуютъ подглавныя точки, и даже какъ помощію этого принципа обнаружить присутствіе таковыхъ точекъ при томъ условіи, когда онѣ начинаютъ оказывать болѣе или менѣе существенное вліяніе на искомую приближенную величину.

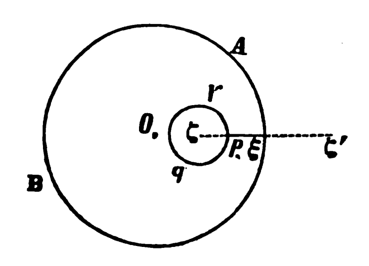
Если вышеуказанная главная точка ζ достаточно удалена отъ окружности E, то вліяніе точки ζ' на искомую приближенную величину функціи X_m дѣлается ничтожнымъ. При этихъ условіяхъ формулу (246) лучше замѣнить другою, въ которой играетъ роль только одна главная точка ζ, а точка ζ' принимается за *нормальную*.

Выводъ такой формулы, замѣняющей формулу (246), необходимъ, между прочимъ, потому, что формула (246) становится

негодною, если количество x дѣйствительное и удовлетворяетъ условію:

$$x^2 > 1. \qquad (257)$$

Въ самомъ дѣлѣ при этомъ условіи величины ζ и ζ' будутъ дѣйствительными и имѣющими одинъ и тотъ же знакъ и будутъ, поэтому, изображаться точками, кои лежатъ на одной и той же ортогональной линіи модулярной поверхности, при чемъ точка ζ' будетъ *существенно нормальною*. Упомянутая ортогональная линія проектируется на плоскость комплекснаго перемѣннаго z либо положительною, либо отрицательною частью оси дѣйствительныхъ величинъ (см. фиг. 8). При такихъ обстоятельствахъ функція $\mathfrak{f}(y)$, опредѣляемая равенствомъ (243), въ предѣлахъ интеграла (244) будетъ обращаться въ безконечность, при чемъ выраженіе (256) погрѣшности Δ_2 сдѣлается негоднымъ для примѣненія. Оно будетъ неудобнымъ для примѣненія даже и тогда, когда количество x мнимое, но слишкомъ близкое къ дѣйствительному, которое удовлетворяетъ условію (257).



Фиг. 8.

Переходя къ выводу приближеннаго выраженія функціи X_m Лежандра для случая, когда главная точка ζ не лежитъ на окружности E и достаточно удалена отъ нея, построимъ при этихъ обстоятельствахъ проекцію на плоскость комплекснаго перемѣннаго основного ортогональнаго пути Λ', эквивалентнаго пути (O) интеграла (239) и не имѣющаго на своемъ протяженіи петли ζ'. Проекція эта изображена на фигурѣ 8 кривою

$$\xi\, pqrp\, \xi\, AB\, \xi,$$

при чемъ $\xi AB \xi$ есть окружность, описанная изъ центра O радіусомъ r, удовлетворяющимъ неравенствамъ:

$$|\zeta| < r < |\zeta'|, \qquad (258)$$

Внося выраженіе (263) функціи $\varphi(y)$ во вторую часть равенства (261), найдемъ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\xi)} = \frac{1}{\zeta^m}\left\{cJ_0 + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{1.3.5\ldots(2k-1)\,c\left(\frac{a}{2}\right)^k}{1.2\ldots k} J_k + \rho_s\right\}, \tag{264}$$

гдѣ

$$J_k = \int\limits_0^\eta (1-y)^m y^{k-\frac{1}{2}}\,dy, \tag{265}$$

$$\rho_s = \int\limits_0^\eta \frac{(1-y)^m \lambda y^{s-\frac{1}{2}} \varphi^{(s)}(\theta y).}{1.2\ldots s} \tag{266}$$

Равенство (266) приводится къ виду:

$$\rho_s = \frac{\lambda\varphi^{(s)}(\varepsilon\eta)}{1.2\ldots s} J_s = \frac{\lambda.1.3.5\ldots(2s-1)\,c\left(\frac{a}{2}\right)^s}{1.2\ldots s.(1-a\varepsilon\eta)^{s+\frac{1}{2}}} J_s, \tag{267}$$

$$0 < \varepsilon < 1,$$

при чемъ $\lambda = 1$, если x дѣйствительное, удовлетворяющее условію (257), и $|\lambda| < 1$, если x мнимое.

Формула (264) приводитъ задачу къ приближенному вычисленію интеграловъ J_k вида (265). Интегралъ этотъ получается изъ интеграла (116) при $\eta_1 = \eta$ и $\alpha_k = k - \frac{1}{2}$. Поэтому въ данномъ случаѣ примѣнимы формулы (116) и (116′), помощію которыхъ для интеграла (265) находимъ:

$$J_k = \frac{\Gamma(1+m)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k+m\right)} - \frac{(1-\eta)^{m+1}}{m+1}\{\eta+(1-\eta)\theta_k\}^{k-\frac{1}{2}}, \tag{268}$$

$$0 < \theta_k < 1.$$

Формулы (264), (267) и (268) достаточны для полученія приближеннаго выраженія интеграла, стоящаго въ лѣвой части равенства (264). Остается еще разсмотрѣть интегралъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)},$$

входящій въ равенство (260). Полагая въ этомъ интегралѣ: $z = -\xi e^{\varphi i}$, найдемъ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)} = \frac{(-1)^m}{2\pi\xi^m}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{-m\omega i}\,d\omega}{\sqrt{(\xi e^{\omega i}+\zeta)(\xi e^{\omega i}+\zeta')}}. \qquad (269)$$

Этотъ интегралъ при дѣйствительномъ x, удовлетворяющемъ условію (257), есть дѣйствительная величина, предѣлы которой какъ легко убѣдиться, опредѣляются при помощи равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)} = \frac{\theta}{\pi\xi^m\mu'}, \quad -1 < \theta < +1, \qquad (270)$$

гдѣ μ' есть наименьшее значеніе модуля выраженія:

$$\sqrt{(\xi e^{\omega i}+\zeta)(\xi e^{\omega i}+\zeta')},$$

представляющееся такъ:

$$\mu' = \sqrt{(\xi-\zeta)(\zeta'-\xi)} = \sqrt{2x\xi-\xi^2-1}. \qquad (270')$$

Если же x мнимое, то изъ равенства (269) слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)} = \frac{\lambda'}{\pi\xi^m\mu'}, \quad |\lambda'| < 1, \qquad (271)$$

$$\mu' = \sqrt{(r-\rho)\left(\frac{1}{\rho}-r\right)}, \qquad (271')$$

гдѣ r и ρ имѣютъ вышеуказанныя значенія, входящія въ равенства (259).

Исходя изъ равенства (260) и послѣдующихъ формулъ, убѣждаемся, что при дѣйствительномъ x, удовлетворяющемъ условію (257), будемъ имѣть:

$$X_m = \frac{1}{\zeta^m}\left\{\frac{c\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} + \frac{1.c.\left(\frac{a}{2}\right)^1\Gamma(1+m)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{1.\Gamma\left(\frac{5}{2}+m\right)}+\ldots\right.$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2k-1).c.\left(\frac{a}{2}\right)^k\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{1.2\ldots k.\ \Gamma\left(\frac{3}{2}+k+m\right)}+\ldots$$

$$\left.+\frac{1.3.5\ldots(2s-3).c.\left(\frac{a}{2}\right)^{s-1}\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{1.2\ldots(s-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+m\right)}+\Delta_s\right\}, \tag{272}$$

гдѣ

$$\Delta_s = \rho_s + \frac{\theta(1-\eta)^m}{\pi\sqrt{(\xi-\zeta)(\zeta'-\xi)}} - \frac{c(1-\eta)^m}{m+1}\{\eta+(1-\eta)\theta_0\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{c(1-\eta)^m}{m+1}\sum_{k=1}^{k=s-1}\frac{1.3\ldots(2k-1)\left(\frac{a}{2}\right)^k}{1.2\ldots k}\{\eta+(1-\eta)\theta_k\}^{k-\frac{1}{2}}, \tag{273}$$

$$\rho_s = \frac{1.3\ldots(2s-1)c\left(\frac{a}{2}\right)^s}{1.2\ldots s(1-a\varepsilon\eta)^{s+\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+s+m\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{(1-\eta)^m}{m+1}\{\eta+(1-\eta)\theta_s\}^{s-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{274}$$

$$-1 < \theta < +1,\ 0 < \varepsilon < 1,$$

$$0 < \theta_k < 1\ (k = 0, 1, \ldots, s).$$

При $s = 1$ формулы (272) и (273) получають видъ:

$$X_m = \frac{1}{\zeta^m}\left\{\frac{c\,\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} + \Delta_1\right\}, \tag{275}$$

$$\Delta_1 = \frac{c\,a}{2(1-a\varepsilon\eta)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+m\right)} - \frac{(1-\eta)^m}{m+1}\{\eta+(1-\eta)\theta_1\}^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$+\frac{\theta(1-\eta)^m}{\pi\sqrt{(\xi-\zeta)(\zeta'-\xi)}} - \frac{c\,(1-\eta)^m}{(m+1)\{\eta+(1-\eta)\theta_0\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{275'}$$

$-1 < \theta < +1$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \theta_0 < 1$, $0 < \theta_1 < 1$. Легко видѣть, что эта погрѣшность Δ_1 при достаточно большомъ m заключается въ предѣлахъ:

$$M_1 < \Delta_1 < N_1, \tag{276}$$

гдѣ

$$M_1 = \frac{c\,a}{2}\left\{\frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+m\right)} - \frac{(1-\eta)^m}{m+1}\right\} - \frac{(1-\eta)^m}{\pi\sqrt{(\xi-\zeta)(\zeta'-\xi)}}$$

$$-\frac{c\,(1-\eta)^m}{(m+1)\,\eta^{\frac{1}{2}}}, \tag{276'}$$

$$N_1 = \frac{c\,a}{2\,(1-a\eta)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+m\right)} - \frac{(1-\eta)^m\eta^{\frac{1}{2}}}{m+1}\right\}$$

$$+\frac{(1-\eta)^m}{\pi\sqrt{(\xi-\zeta)(\zeta'-\xi)}} - \frac{c\,(1-\eta)^m}{m+1}. \tag{276''}$$

При мнимомъ x формула (272) сохраняетъ свой видъ, но для опредѣленія предѣловъ погрѣшности Δ_s должна служить формула, отличная отъ формулы (273) и получаемая изъ послѣдней замѣною: 1) количества θ количествомъ λ', которое входитъ въ равенство (271), 2) количества ρ_s выраженіемъ, которое получается при помощи равенства (274), если во второй его части добавимъ множитель λ, модуль котораго менѣе 1, и 3) количествъ ξ, ζ и ζ' ихъ модулями r, ρ и $\frac{1}{\rho}$.

n^0 35. Въ nn^0 33 и 34 мы имѣли дѣло съ интеграломъ вида:

$$\int_{(L)} f(z)\, z^{-m}\, dz\,, \tag{277}$$

который представляетъ частный случай интеграла вида (1) простѣйшій въ отношеніи состава функціи $\psi(z)$. Въ данномъ случаѣ

$$\psi(z) = z^{-1},$$

при чемъ, какъ мы видѣли, проекціи линій уровня и ортогональныхъ линій модулярной поверхности представляются концентрическими окружностями, описанными изъ центра O, и прямолинейными лучами, выходящими изъ точки O. Преобразовать при этихъ условіяхъ путь L интеграціи въ основной путь Λ, какъ видно изъ указаннаго въ n^0 33 примѣра, представляется весьма простымъ дѣломъ, если извѣстно положеніе особыхъ точекъ функціи $f(z)$.

Пользуясь этою простотою полученія основного пути Λ для интеграла (277), мы можемъ указать пріемъ, который въ общемъ случаѣ переноситъ построеніе основного ортогональнаго пути на модулярную поверхность, соотвѣтствующую интегралу (277). Этотъ пріемъ, если по существу не упрощаетъ, то теоретически уясняетъ вопросъ о полученіи ортогональнаго основного пути и состоитъ въ слѣдующемъ.

Преобразуемъ въ интегралѣ $[abc]$, опредѣляемомъ равенствомъ (7), перемѣнное z, положивъ:

$$\psi(z) = \frac{1}{v}\,, \tag{278}$$

гдѣ v есть новое перемѣнное. Послѣ этого преобразованія интегралъ $[abc]$ представится въ слѣдующей формѣ:

$$[abc] = \int_{(L)} F(v)\, v^{-m}\, dv, \qquad (278')$$

гдѣ L есть кривая, описываемая точкой v въ то время, когда точка z описываетъ кривую abc.

Интегралъ, стоящій во второй части равенства (278′), принадлежитъ къ виду (277), и его путь L легко превращается въ соотвѣтствующій ортогональный основной путь Λ. Послѣ этого получается ортогональный основной путь ABC, соотвѣтствующій интегралу (7) и опредѣляемый, какъ кривая, описываемая точкой z, удовлетворяющей уравненію (278), въ то время, когда точка v описываетъ путь Λ.

Пріемъ этотъ, помогающій уясненію деформаціи пути интегрированія перенесеніемъ этого пути на болѣе простую модулярную поверхность, переноситъ трудности вопроса на задачу о выполненіи преобразованія (278), которая сама по себѣ вообще потребуетъ примѣненія теоріи ряда Лагранжа и связанныхъ съ нею вспомогательныхъ средствъ, не исключая изученія свойствъ модулярной поверхности, соотвѣтствующей данной функціи $\psi(z)$.

Касаясь модулярныхъ поверхностей простѣйшей конструкціи, обратимся къ другому не менѣе простому случаю, съ которымъ мы уже имѣли дѣло въ n° 12, разсматривая интегралъ (71_2). Такой интегралъ теперь мы представимъ такъ:

$$J = \int_{(L)} f(z)\, e^{-mz}\, dz.$$

Въ данномъ случаѣ $\psi(z) = e^{-z}$, при чемъ этотъ случай представляется примѣчательнымъ по простотѣ свойствъ соотвѣтствующей модулярной поверхности. Эта поверхность *цилиндрическая*, образующія которой параллельны *мнимой* оси плоскости комплекснаго перемѣннаго z. Проекціи на эту плоскость линій уровня и ортогональныхъ къ нимъ линій суть *прямыя*, соотвѣт-

ственно параллельныя осямъ мнимой и дѣйствительной. Ортогональныя линіи не могутъ имѣть кратныхъ точекъ или точекъ развѣтвленія. Консервативныя деформаціи нити abc, описанныя въ § 8, и построеніе основного пути Λ, эвивалентнаго данному пути L, легко себѣ представить для этой поверхности, если извѣстны особыя точки функціи $f(z)$. Замѣтимъ, что преобразованіе при помощи уравненія (17), которымъ мы выше (въ § 4) широко пользовались, переноситъ изображенія именно на эту модулярную поверхность, при чемъ свойства проекціи преобразованнаго основного пути $\alpha 0 \gamma$ были изъяснены въ n^0 12.

n^0 36. Къ числу интеграловъ вида (1), изслѣдуемыхъ при помощи модулярной поверхности, указанной въ n^0 33, принадлежатъ тѣ, кои служатъ для приближеннаго вычисленія весьма далекихъ членовъ ряда Лорана:

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n , \tag{279}$$

сходящагося въ данной двусвязной области, заключенной между двумя окружностями S_1 и S_2, описанными изъ центра O радіусами r_1 и $r_2 > r_1$, если функція $\Phi(z)$ въ этой области голоморфна и не измѣняетъ своего значенія послѣ обхода по замкнутой кривой, окружающей окружность S_1.

Пусть S есть окружность, описанная изъ центра O радіусомъ r, заключеннымъ между r_1 и r_2. Общій членъ a_n указаннаго ряда представляется такъ:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(S)} \frac{\Phi(z)\, dz}{z^{n+1}} . \tag{279'}$$

Отсюда видно, что при $n = m$ общій членъ ряда Лорана вычисляется пріемами, указанными въ n^0 33, коими получаются приближенныя выраженія интеграла, стоящаго во второй части равенства (226).

При $n = -m$ будемъ имѣть:

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(S)} \frac{\Phi(z)\, dz}{z^{1-m}} . \tag{279''}$$

Замѣняя въ послѣднемъ интегралѣ перемѣнное z чрезъ $\frac{1}{z}$ находимъ:

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(S')} \frac{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)dz}{z^{m+1}}, \qquad (279''')$$

гдѣ S' есть окружность, описанная изъ центра O радіусомъ $\rho = \frac{1}{r}$. Послѣднее выраженіе a_{-m} показываетъ, что и оно вычисляется также пріемами, указанными въ n^0 33 для полученія приближенной величины интеграла, стоящаго во второй части равенства (226).

Рядъ Лорана, если положимъ въ немъ $z = re^{xi}$ превращается въ тригонометрическій, къ которому примѣняются эти пріемы. Но теорія тригонометрическихъ рядовъ располагаетъ также своими болѣе тонкими средствами для приближеннаго вычисленія далекихъ членовъ.

§ 11. Приближенное вычисленіе производной: $\frac{d^{\alpha m-\beta}}{dx^{\alpha m-\beta}}\{F(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)\}$. Связь этого вычисленія съ нѣкоторыми изъ знаменитѣйшихъ вопросовъ математическаго естествознанія и съ теоріей ряда Лагранжа. Приближенныя выраженія далекаго члена ряда Лагранжа.

n^0 37. Подъ α и β будемъ разумѣть числа, не выходящія изъ конечныхъ предѣловъ, при чемъ число $\alpha m-\beta$ пусть будетъ *цѣлое*, стремящееся къ $+\infty$ вмѣстѣ съ m. Число α при этомъ должно быть положительнымъ.

Разсмотримъ при этихъ обозначеніяхъ производную

$$\frac{d^{\alpha m-\beta}}{dx^{\alpha m-\beta}}\{F(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)\}. \qquad (280)$$

Функціи $F(x+z)$, $\varphi_1(x+z)$, $\varphi_2(x+z), \ldots, \varphi_m(x+z)$ будемъ считать голоморфными въ области точки $z=0$. При этомъ условіи будемъ имѣть:

$$\frac{1}{1.2\ldots(\alpha m-\beta)}\frac{d^{\alpha m-\beta}\{F(x).\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)\}}{dx^{\alpha m-\beta}}=$$

$$=\int_{(0)} f(z)\,\psi^{\alpha m}(z)\,dz, \qquad (281)$$

гдѣ

$$f(z)=\frac{F(x+z)}{2\pi i z^{1-\beta}},\ \psi(z)=z^{-1}\{\varphi_1(x+z)\varphi_2(x+z)\ldots\varphi_m(x+z)\}^{\frac{1}{\alpha m}}, \qquad (282)$$

путь (O) интеграла есть замкнутая кривая, окружающая начало O плоскости комплекснаго перемѣннаго z, проходимая при интеграціи въ положительномъ направленіи и выдѣляющая сплошную односвязную площадь, внутри и на границахъ которой нѣтъ особыхъ точекъ z функціи

$$F(x+z)\,\varphi_1(x+z)\,\varphi_2(x+z)\ldots\varphi_m(x+z).$$

Равенства (281) и (282) сводятъ вычисленіе производной вида (280) къ вычисленію интеграла вида (1).

Исчисленіе приближенныхъ выраженій производныхъ вида (280) имѣетъ въ математическомъ анализѣ и его приложеніяхъ огромную важность.

Такъ, при помощи равенства (11‴) убѣждаемся, что приближенное вычисленіе вѣроятности P_n, указанной въ n^0 7, сводится къ вычисленію производной вида (280), если функціи $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r), \ldots, \varphi_m(r)$, опредѣляемыя равенствами (10″), суть алгебраическіе полиномы и перемѣнныя $x_1, x_1, \ldots, x_m$ имѣютъ цѣлыя значенія. Это приближенное вычисленіе приводитъ, послѣ нѣкоторыхъ извѣстныхъ въ математическомъ анализѣ распространеній [1]), къ общимъ законамъ массовыхъ независи-

[1]) Эти распространенія состоятъ въ переходѣ отъ случая, когда упомянутыя функціи $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r), \ldots, \varphi_m(r)$ суть конечные полиномы, къ случаю, когда онѣ превращаются въ интегралы или безконечные ряды, а также къ случаю, когда перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дѣлаются дробными и даже ирраціональными числами.

мыхъ случайныхъ явленій, каковые законы представляютъ наибольшій интересъ въ Теоріи Вѣроятностей и ея разнообразныхъ приложеніяхъ.

Приближенное вычисленіе далекаго члена ряда Лагранжа и, слѣдовательно, рѣшеніе важнѣйшихъ задачъ Небесной Механики, кои Лапласъ связалъ съ этимъ рядомъ, также приводятся къ вычисленію производныхъ вида (280).

Такимъ образомъ, указанные вопросы, принадлежащіе къ знаменитѣйшимъ вопросамъ математическаго естествознанія, концентрируются около задачи о приближенномъ вычисленіи производныхъ вида (280).

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко убѣдиться, что не только указанныя задачи Небесной Механики, но также упомянутые законы Теоріи Вѣроятностей и всѣ вообще вопросы, связанные съ приближеннымъ вычисленіемъ производныхъ вида (280), *тѣснѣйшимъ образомъ соприкасаются съ приближеннымъ вычисленіемъ далекаго члена ряда Лагранжа.*

Чтобы доказать это, предположимъ, что числа αm и β цѣлыя. Условіе это всегда осуществимо. Въ самомъ дѣлѣ, если бы оно не выполнялось, то мы всегда могли бы числа α и β измѣнить такъ, чтобы цѣлое число $\alpha m - \beta$ осталось безъ измѣненія и число αm сдѣлалось также цѣлымъ. Такой выборъ чиселъ α и β не представляетъ затрудненій и дозволяетъ намъ въ послѣдующемъ считать числа $\alpha m - \beta$, αm и β цѣлыми. Принявъ это условіе, введемъ слѣдующее обозначеніе:

$$G'(x+z) = F(x+z)\left\{\varphi_1(x+z)\varphi_2(x+z)\ldots\varphi_m(x+z)\right\}^{\frac{\beta-1}{\alpha m}}. \tag{283}$$

Теперь легко видѣть, что производная (280) лишь постояннымъ множителемъ отличается отъ одного изъ далекихъ членовъ Лагранжева ряда:

$$G(x+z) = G(x) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{t^k}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\left\{G'(x)\varphi^k(x)\right\}}{dx^{k-1}}, \tag{283'}$$

примѣненнаго къ уравненію:

$$z = t \cdot \varphi(x + z), \tag{284}$$

въ которомъ

$$\varphi(x+z) = \{ \varphi_1(x+z)\, \varphi_2(x+z) \ldots \varphi_m(x+z) \}^{\frac{1}{\alpha m}}, \tag{284'}$$

при чемъ рядъ этотъ опредѣляетъ функцію $G(x+z)$ того корня z уравненія (284), который при $t = 0$ обращается въ нуль. Этотъ далекій членъ указаннаго Лагранжева ряда получается изъ общаго члена ряда (283′) при $k = \alpha m - \beta + 1$.

Сдѣланное сближеніе производной (280) съ далекимъ членомъ ряда Лагранжа открываетъ возможность воспользоваться при построеніи основного пути Λ, эквивалентнаго пути (O) интеграла (281), не только общими пріемами, кои изложены выше (въ *nn*° 3, 24, 25, 26 и 35), но и тѣми выводами, кои установлены въ теоріи ряда Лагранжа собственно для полученія приближеннаго выраженія далекаго члена этого ряда.

Приближенное вычисленіе далекаго члена ряда Лагранжа разсматривалъ *Коши* (въ «Mémoire sur divers points d'analyse»), а потомъ *Дарбу*.

Полнѣе этотъ важный вопросъ трактовался въ моей статьѣ: «Рядъ Лагранжа» (гл. III, §§ 15—19). Здѣсь при нѣсколько отличныхъ терминахъ и обозначеніяхъ даны мною правила для полученія различныхъ основныхъ путей интегрированія, эквивалентныхъ пути интеграла, выражающаго общій членъ ряда Лагранжа, и указаны способы для опредѣленія главныхъ точекъ этихъ путей и для полученія соотвѣтствующихъ количественныхъ элементовъ K_1 и K_2. Напомнимъ здѣсь важнѣйшіе изъ этихъ выводовъ, пополняя ихъ новыми заключеніями и приспособляя ихъ выраженіе къ даннымъ выше условіямъ и къ тому изложенію, которое принято въ настоящей статьѣ.

n° 38. Такъ какъ большое число m произвольно, то можемъ разсматривать не тотъ далекій членъ ряда (283′), который получается изъ общаго члена при $k = \alpha m - \beta + 1$ и выражается интеграломъ (281), а другой, получаемый изъ общаго

члена при $k = m$. Этотъ членъ ряда Лагранжа, по раздѣленіи на mt^m, выражается такъ:

$$\frac{1}{1.2\ldots.(m-1)}\frac{d^{m-1}\{G'(x)\varphi^m(x)\}}{dx^{m-1}} = \int_{(0)} f(z)\psi^m(z)dz, \quad (285)$$

гдѣ

$$f(z) = \frac{G'(x+z)}{2\pi i} \text{ и } \psi(z) = z^{-1}\varphi(x+z), \quad (285')$$

при чемъ путь (O) есть безконечно малая замкнутая кривая, ограничивающая площадь, внутри которой находится начало O и не лежитъ никакихъ особыхъ точекъ z функцій $G'(x+z)$ и $\varphi(x+z)$.

Предположимъ, что функція $\psi(z)$ для безконечно большихъ значеній z обращается либо въ нуль, либо въ безконечность.

Отыскивая основной путь Λ, эквивалентный пути (O), вообразимъ модулярную поверхность, соотвѣтствующую разсматриваемой функціи $\psi(z)$, и на ней первоначальный путь (O) и изображенія особыхъ точекъ функціи $f(z)\psi^m(z)$ и корней уравненія $\psi'(z) = 0$.

Точкѣ O будетъ соотвѣтствовать поднимающаяся въ безконечность *вершина* модулярной поверхности, при чемъ точки безконечно малаго замкнутаго пути (O), окружающаго эту вершину, будутъ лежать въ безконечно высокихъ уровняхъ. При такой формѣ первоначальнаго пути (O) признаки главныхъ и подглавныхъ точекъ, указанные въ n^0 26, приводятъ къ разсмотрѣнію лишь тѣхъ изъ точекъ (162), *кои уникурсально соединимы съ вершиною O модулярной поверхности.* Найдя такія точки и выбравъ изъ нихъ тѣ, для которыхъ модуль $\psi(z)$ пріобрѣтаетъ наибольшее значеніе K_1 и значенія, хотя меньшія K_1, но весьма близкія къ K_1, будемъ имѣть группу главныхъ и подглавныхъ точекъ искомаго основного пути Λ.

Но, какъ пояснено было въ n^0 26, въ данномъ случаѣ вопросъ объ уникурсальной соединимости точки O съ главными

точками, въ основѣ котораго лежитъ *аналитическое продолженіе* количества z, какъ функціи модуля $\psi(z)$, изъ области точки $z=0$ въ области главныхъ точекъ, можно рѣшить при помощи одного и того же указаннаго ниже Лагранжева ряда $S(t)$, расположеннаго по степенямъ t, не выходя за предѣлы его круга сходимости. Заключеніе это подтверждается само собою послѣдующимъ изложеніемъ.

Предположимъ сначала, что функція $f(z)\psi^m(z)$ не имѣетъ въ конечной области плоскости коплекснаго перемѣннаго z такихъ особыхъ точекъ z, для которыхъ функція $\psi(z)$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. При этихъ условіяхъ главныя и подглавныя точки искомаго основного пути Λ выбираются исключительно изъ числа корней уравненія: $\psi'(z)=0$, *причемъ отысканіе главныхъ точекъ ставится въ непосредственную связь съ изысканіемъ необходимыхъ и достаточныхъ условій сходимости ряда Лагранжа:*

$$z = S(t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{t^k}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\{\varphi^k(x)\}}{dx^{k-1}}\,. \qquad (286)$$

Всѣ выводы, какъ общіе, такъ и частные, кои относятся къ этому изысканію и изложены въ статьѣ «Рядъ Лагранжа», могутъ намъ послужить на пользу при построеніи искомаго основного пути Λ на модулярной поверхности.

Пусть $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ будутъ корни уравненія $\psi'(z)=0$ и пусть корни эти размѣщены въ порядкѣ пониженія ихъ уровней, т. е.

$$|\,\psi(\mathfrak{z}_1)\,| \geqq |\,\psi(\mathfrak{z}_2)\,| \geqq |\,\psi(\mathfrak{z}_3)\,| \geqq \ldots . \qquad (286')$$

Обозначимъ чрезъ $T_1, T_2, T_3, \ldots$ значенія t, соотвѣтствующія значеніямъ z, совпадающимъ съ величинами $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$, такъ что

$$T_s = \frac{\mathfrak{z}_s}{\varphi(x+\mathfrak{z}_s)} = \frac{1}{\psi(\mathfrak{z}_s)} = \frac{1}{\varphi'(x+\mathfrak{z}_s)}\,, \quad s=1,2,3,\ldots \qquad (286'')$$

При изысканіи условій сходимости ряда $S(t)$, опредѣляемаго равенствомъ (286), мы должны выбрать изъ числа величинъ

T_1, T_2, T_3, ... такъ называемыя *критическія* значенія t, кои лежатъ на окружности C круга сходимости ряда $S(t)$. Этимъ значеніямъ $t = T$ соотвѣтствуютъ главныя точки $z = \mathfrak{z}$. Изысканіе ведется по слѣдующему общему плану [1]).

Рядъ $S(t)$ будетъ сходящимся, если $|t| < |T_1|$. Если величина $S(\lambda T_1)$ при возрастаніи λ отъ 0 до 1 будетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ $\mathfrak{z}_1$, то T_1 не будетъ критическимъ значеніемъ t и $\mathfrak{z}_1$ не будетъ главною точкою основного пути Λ. Критическое значеніе t нужно искать въ ряду величинъ: T_2, T_3, ... Если величина $S(\lambda T_2)$ при возрастаніи λ отъ 0 до 1 не будетъ стремиться къ $\mathfrak{z}_2$, то и T_2 не будетъ критическимъ значеніемъ t, а $\mathfrak{z}_2$ не будетъ главною точкою искомаго основного пути Λ. Критическое значеніе t нужно искать въ ряду величинъ: T_3, T_4, ... Продолжая это изысканіе, мы должны дойти до такого значенія T_i, для котораго рядъ $S(\lambda T_i)$ остается сходящимся при возрастаніи λ отъ 0 до 1 и величина $S(\lambda T_i)$ стремится къ $\mathfrak{z}_i$, когда λ, возрастая, стремится къ 1. Въ такомъ случаѣ величина T_i есть критическое значеніе t и $\mathfrak{z}_i$ есть главная точка искомаго основного пути Λ. Другія главныя точки того же пути (если таковыя существуютъ) обладаютъ такими же свойствами, какъ точка $\mathfrak{z}_i$

Трудности этого общаго плана, допускающаго значительныя упрощенія лишь въ частныхъ случаяхъ, заключаются въ томъ, что рѣшеніе вопроса сводится имъ къ вычисленію безконечнаго ряда $S(t)$ при положеніи точки t на самой окружности C круга сходимости. Вообще эти трудности могутъ быть облегчены отчасти лишь при посредствѣ пріема, основаннаго на томъ соображеніи, что при маломъ положительномъ значеніи ε и при $t_1 = (1 - \varepsilon)T$ точка z_1, изображающая величину $z_1 = S(t_1)$, должна быть близкою къ точкѣ $\mathfrak{z}$ и уникурсально соединимою съ $\mathfrak{z}$, если точка $\mathfrak{z}$ есть главная (такъ какъ при этомъ условіи должна существовать уникурсальная вѣтвь $O\mathfrak{z}$ кривой N_3). Вычисленіе такой величины z_1, достаточное для нашихъ цѣлей, легче, нежели вычисленіе величины $S(T)$, по

[1]) См. „Рядъ Лагранжа“, гл. I, § 8.

тому, что точка t_1 лежитъ *внутри* круга сходимости, а не на его окружности [1]). При этомъ вопросъ объ уникурсальной соединимости точекъ z_1 и $\mathfrak{z}$ рѣшается помощію вычисленія корней $z'_0, z'_1, \ldots, z'_{\nu-1}$ уравненія

$$z = t_1 \varphi (x + z),$$

обращающихся въ $z = \mathfrak{z}$ при $t_1 = (1-\varepsilon) T = T$ (иначе, при $\varepsilon = 0$) и приближенно опредѣляемыхъ посредствомъ формулы (164′), полагая въ ней $\zeta = \mathfrak{z}$ и

$$y = \lg \{t_1 \psi(\mathfrak{z})\} = \lg \frac{z_1 \varphi (x + \mathfrak{z})}{\mathfrak{z} \varphi (x + z_1)}$$

и вычисляя H по формулѣ (145) [ν есть показатель кратности корня $z = \mathfrak{z}$ уравненія $z = T\varphi(x + z)$]. Если точки z_1 и $\mathfrak{z}$ уникурсально соединимы, то одинъ изъ указанныхъ корней z'_0, $z'_1, \ldots, z'_{\nu-1}$ долженъ совпадать съ z_1. Если же такого совпаденія не окажется, то точка $\mathfrak{z}$ не есть уникурсально соединимая съ O и, слѣдовательно, не есть главная.

Замѣтимъ, что положеніе указанной сейчасъ точки z_1 играетъ *важную роль при опредѣленіи конструкціи ортогональнаго основного пути* Λ *вблизи точки* $z = \mathfrak{z}$, если $\mathfrak{z}$ окажется главною точкою. При помощи этой точки z_1 рѣшается вопросъ, *какія именно нисходящія вѣтви развѣтвляющейся ортогональной линіи* $N_{\mathfrak{z}}$, *проходящей чрезъ точку* $\mathfrak{z}$, *войдутъ въ составъ этого пути* Λ. Въ самомъ дѣлѣ точкою z_1 опредѣляется въ области точки $\mathfrak{z}$ та изъ *восходящихъ* отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныхъ вѣтвей, которая уникурсально соединяетъ вершину O съ точкою $\mathfrak{z}$. Эта ортогональная вѣтвь $O\mathfrak{z}$, какъ указано выше (см. *nn*° 26 и 28) и полнѣе выяснено въ главѣ III статьи «Рядъ Лагранжа» (см. § 15, «Правило»), опредѣляетъ *двѣ* нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныя вѣтви, кои равно наклонены къ вѣтви $O\mathfrak{z}$, образуя съ нею уголъ $\frac{\pi}{\nu}$. Эти двѣ нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$

---

[1]) Для облегченія вычисленія ряда $S(t_1)$ въ разсматриваемомъ процессѣ опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ основного пути Λ, къ сожалѣнію, нельзя примѣнить пріемовъ, указанныхъ въ *n*° 39, ибо эти пріемы сами нуждаются въ предварительномъ построеніи основного пути Λ.

ортогональныя вѣтви и должны войти въ составъ пути Λ, какъ его *главныя* части, прилегающія къ главной точкѣ $\mathfrak{z}$.

Зная главныя точки, будемъ имѣть для нихъ значеніе модуля функціи $\psi(z)$, которое представитъ величину K_1, и будемъ знать радіусъ ρ круга сходимости ряда $S(t)$, представляющійся такъ:

$$\rho = \frac{1}{K_1}.$$

Переходя къ подглавнымъ точкамъ, напомнимъ, что онѣ должны лежать внѣ найденнаго круга сходимости, но весьма близко къ его окружности C. Слѣдовательно, подглавною точкою можетъ быть лишь такая точка $\mathfrak{z}$, которая принадлежитъ къ точкамъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и для которой модуль величины T, опредѣляемой соотвѣтствующимъ равенствомъ (286″), болѣе ρ, но весьма близокъ къ ρ. Если $\mathfrak{z}$ удовлетворяетъ этимъ признакамъ, то нужно еще убѣдиться въ томъ, что она уникурсально соединима съ точкою O. Для этой цѣли возможно опять воспользоваться вышеуказаннымъ рядомъ $S(t)$, вообразивъ точку t_1 пересѣченія прямой OT съ окружностью C и затѣмъ разсмотрѣвъ величину $z_1 = S(t_1)$. Точка $\mathfrak{z}$ будетъ подглавною лишь въ томъ случаѣ, если точка z_1 не есть главная и если притомъ точка z_1 уникурсально соединима съ точкою $\mathfrak{z}$. Уникурсальная соединимость точекъ z_1 и $\mathfrak{z}$ опредѣляется легко, ибо эти точки, при возможности уникурсальнаго соединенія, будутъ *весьма близкими* другъ къ другу. Рѣшая этотъ вопросъ, нужно слѣдовать тому же порядку, какой сейчасъ указанъ для главной точки. При этомъ указанная точка z_1 играетъ важную роль также при изслѣдованіи конструкціи основного пути Λ вблизи подглавной точки $\mathfrak{z}$, опредѣляя тѣ двѣ нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныя вѣтви, кои должны войти въ составъ этого пути, какъ его главныя части, прилегающія къ $\mathfrak{z}$. Роль эта вполнѣ аналогична той, какая выяснена сей часъ при разсмотрѣніи главной точки.

При трудности изложеннаго общаго плана опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ пріобрѣтаютъ значеніе различные

менѣе общіе, но болѣе простые признаки этихъ точекъ. Многіе такіе признаки даны въ различныхъ мѣстахъ статьи: «Рядъ Лагранжа» (см. гл. I, §§ 9, 10, 11, 15; гл. III, § 21). Эти признаки въ сущности сводятся къ особеннымъ частнымъ признакамъ возможности или невозможности уникурсальнаго соединенія точки O съ тѣми или другими точками $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и иногда доводятъ вопросъ объ отысканіи главныхъ точекъ до крайней простоты, какъ это представляется, напримѣръ, въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ n^0 7 и имѣющемъ важное значеніе въ Теоріи Вѣроятностей. Въ этомъ случаѣ уникурсальная соединимость главныхъ точекъ съ точкою O очевидна, причемъ уникурсальными вѣтвями, соединяющими точку O съ главными точками, будутъ, какъ легко убѣдиться, ортогональныя линіи, кои проектируются на плоскость комплекснаго перемѣннаго z *прямолинейными* отрѣзками.

Отыскавъ главныя и подглавныя точки основного пути Λ и количество K_1, выяснимъ затѣмъ порядокъ опредѣленія *нормальнаго* значенія количества K_2 (см. n^0 25) и соотвѣтствующихъ ему нормальныхъ точекъ того же пути. Съ этою цѣлью опять обратимся къ вышеуказаннымъ точкамъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и выдѣлимъ изъ нихъ тѣ, *кои уникурсально соединимы съ полюсомъ* O. Пусть эти точки будутъ: $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ Въ числѣ указанныхъ точекъ $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ находятся всѣ главныя и подглавныя точки основного пути Λ. Вообразимъ еще тѣ изъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$, кои уникурсально соединимы съ этими главными и подглавными точками и лежатъ на указанныхъ выше вѣтвяхъ, входящихъ въ составъ пути Λ, и присоединимъ такія точки, если онѣ существуютъ, къ точкамъ $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ Затѣмъ изъ числа всѣхъ этихъ точекъ $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ исключимъ главныя и подглавныя, а изъ остальныхъ указанныхъ точекъ изберемъ тѣ, кои лежатъ въ *наивысшемъ* уровнѣ, т. е. для которыхъ модуль $\psi(z)$ пріобрѣтаетъ наибольшее значеніе. Эти точки суть искомыя *нормальныя*, а соотвѣтствующій имъ модуль $\psi(z)$ представляетъ искомое нормальное значеніе K_2.

Процессъ опредѣленія нормальнаго значенія количества K_2, какъ видно изъ вышеуказаннаго, вообще еще болѣе труденъ,

чѣмъ опредѣленіе главныхъ и подглавныхъ точекъ, ибо этотъ процессъ требуетъ аналитическаго продолженія функціи $z=S(t)$, опредѣляемой равенствомъ (286), за предѣлы круга сходимости на *конечное* разстояніе отъ окружности C. Но въ этомъ случаѣ дѣло вообще упрощается тѣмъ, что для успѣшнаго рѣшенія вопроса о приближенномъ вычисленіи интеграла (285) не представляется безусловной необходимости имѣть нормальное значеніе K_2. Достаточно имѣть какое нибудь значеніе K_2, удовлетворяющее первому главному условію (n^0 4), и какой нибудь хорошо направленный основной путь Λ, соотвѣтствующій этому значенію K_2.

Вообразимъ затѣмъ нормальныя звенья второго рода (см. n^0 25), принадлежащія ортогональному основному пути Λ. Если $\xi'\xi''$ есть такое звено, соотвѣтствующее главной или подглавной точкѣ ζ, то, какъ мы выше видѣли, его ортогональныя вѣтви $\xi'\zeta$ и $\zeta\xi''$ характеризуются тѣмъ, что уголъ 2Ω между ними дѣлится ортогональной вѣтвью $O\zeta$ пополамъ, при чемъ абсолютная величина этого угла опредѣлена выше. Но мы должны также принять во вниманіе направленіе первоначальнаго пути (O), которое считается положительнымъ. Въ такомъ случаѣ уголъ 2Ω будетъ отрицательнымъ, т. е. $2\Omega = -\frac{2\pi}{\nu}$, гдѣ ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$.

Предположимъ теперь, что функція $G(x+z)$ и, слѣдовательно, функція $f(z)$ имѣетъ особыя точки, соотвѣтствующія такимъ конечнымъ значеніямъ z, для которыхъ функція $\psi(z)$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. Если всѣ эти точки лежатъ внѣ площади, выдѣляемой найденною кривою Λ, то эта кривая попрежнему останется основнымъ путемъ. Но если нѣкоторыя особыя точки функціи $G(x+z)$ будутъ подниматься постепенно все выше и выше, вступивъ въ область, ограниченную кривою Λ, то сначала онѣ измѣнятъ ортогональный основной путь Λ, повліявъ на нормальное значеніе K_2, потомъ могутъ сдѣлаться подглавными, затѣмъ главными точками на ряду съ прежними и, наконецъ, сдѣлаются такими главными,

при которыхъ прежнія главныя и подглавныя точки утратятъ это свое значеніе. Главнымъ точкамъ этого рода будутъ соотвѣтствовать петли каждая съ однимъ обходомъ въ отрицательномъ направленіи ($2\Omega = -2\pi$).

Имѣя главныя и подглавныя точки ортогональнаго или хорошо направленнаго неортогональнаго основного пути Λ, для котораго отношеніе $(K_2 : K_1)^m$ удовлетворяетъ первому главному условію (n^0 4), и подраздѣливъ этотъ путь на звенья перваго или второго рода, можемъ далѣе примѣнить тѣ или другіе процессы, изложенные въ настоящей статьѣ, къ приближенному вычисленію интеграловъ, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ звеньямъ, и сложить эти результаты.

Выполняя этотъ процессъ для ортогональнаго основного пути Λ, предположимъ, что главныя и подглавныя точки этого пути, расположенныя въ томъ порядкѣ, какъ онѣ встрѣчаются при его обходѣ, будутъ: $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Соотвѣтствующія имъ вышеупомянутыя нормальныя ортогональныя звенья втораго рода, полнѣе обозначенныя согласно замѣчаніямъ, сдѣланнымъ въ nn^0 28 и 29, пусть будутъ:

$$\xi'_1 z'_1 z_1'' \xi_1'', \ \xi'_2 z'_2 z_2'' \xi''_2, \ldots, \ \xi'_n z_n' z''_n \xi''_n. \qquad (287)$$

Соотвѣтствующіе этимъ звеньямъ углы 2Ω, опредѣляемые равенствомъ вида (165), при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ представятся такъ:

$$2\Omega_k = -\frac{2\pi}{\nu_k}, \quad (k = 1,2,\ldots, n), \qquad (288)$$

гдѣ ν_k есть показатель кратности корня $z = \zeta_k$ уравненія: $\psi(z) = \psi(\zeta_k)$. При этомъ здѣсь и ниже мы предполагаемъ, что особыя точки функціи $\psi(z)$ не совпадаютъ съ главными и подглавными точками основного пути Λ, и что функція $f(z)$, опредѣляемая первымъ изъ равенствъ (285′, сохраняетъ конечное значеніе для всѣхъ второстепенныхъ частей основного пути Λ.

Второстепенныя части основного пути Λ представятся его частями:

$$\xi_1'' \xi'_2, \ \xi''_2 \xi'_3, \ldots, \ \xi''_{n-1} \xi'_n, \ \xi''_n \xi'_1. \qquad (289)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (285) представится такъ:

$$\frac{1}{1.2...(m-1)}\,\frac{d^{m-1}\{G'(x)\varphi^{m}(x)\}}{dx^{m-1}}=\sum_{k=1}^{k=n}\Big\{[\xi'_k z'_k z''_k \xi''_k]+$$

$$+[\xi''_k \xi'_{k+1}]\Big\}, \qquad (290)$$

гдѣ $\xi'_{n+1}=\xi'_1$ и $[abc]$ есть интегралъ (7), въ которомъ функціи $f(z)$ и $\psi(z)$ опредѣляются при помощи равенствъ (285').

Пусть a есть длина совокупности второстепенныхъ частей (289) основного пути Λ и μ есть наибольшее значеніе модуля функціи

$$f(z)=\frac{G'(x+z)}{2\pi i},$$

находимое въ предположеніи, что точка z обходитъ всѣ упомянутыя второстепенныя части. При этихъ обозначеніяхъ, на основаніи формулы (63), находимъ для суммы интеграловъ, отнесенныхъ къ второстепеннымъ частямъ пути Λ, слѣдующее выраженіе:

$$\sum_{k=1}^{k=n}[\xi''_k \xi'_{k+1}]=\lambda\mu a\,K_1{}^{m},\quad |\lambda|<1. \qquad (291)$$

Заслуживаетъ вниманія еще другая формула для вычисленія интеграла, соотвѣтствующаго совокупности второстепенныхъ частей (289). Эта формула основана на равенствахъ (61_2) и (61_4). Иначе говоря, эта формула получается при помощи преобразованія (17) и соотвѣтствуетъ *преобразованному* основному пути Λ_1, описываемому точкой

$$y=\lg\frac{\psi(\zeta)}{\psi(z)}$$

въ то время, когда точка z проходитъ ортогональный путь Λ. Имѣя въ виду получить эту формулу, предположимъ, что путь

Λ избранъ такъ, что функція $\Pi(y)$, опредѣляемая равенствомъ (61_3), для всѣхъ точекъ z второстепенныхъ частей ортогональнаго пути Λ_1 сохраняетъ *конечное* значеніе. Это условіе будетъ имѣть силу, если количество K_2, зависящее отъ выбора уровня L, изберемъ такъ, чтобы оно было *болѣе* нормальнаго значенія K_2. При такихъ условіяхъ будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{k=n} [\xi'_k \xi'_{k+1}] = \lambda \mu_1 a_1 K_1''', \quad |\lambda| < 1, \tag{291'}$$

гдѣ μ_1 есть наибольшее значеніе модуля функціи $\Pi(y)$ для точекъ y второстепенныхъ частей пути Λ_1 и a_1 есть длина тѣхъ же второстепенныхъ частей.

Легко при этомъ убѣдиться, что

$$a_1 = 2\pi. \tag{291''}$$

Въ самомъ дѣлѣ, путь Λ_1 будетъ представлять *ломаную* линію, слагающуюся изъ *прямолинейныхъ* отрѣзковъ. Тѣ изъ этихъ отрѣзковъ, кои представляютъ второстепенныя части пути Λ_1, параллельны *мнимой* оси, при чемъ длина ихъ представляетъ собою абсолютную величину приращенія *амплитуды* функціи $\psi(z)$, пріобрѣтаемаго въ то время, когда точка z обходитъ путь Λ. Но это приращеніе имѣетъ одинаковую величину и въ томъ случаѣ, когда точка z обходитъ вышеуказанный безконечно малый замкнутый путь (O) интеграла (285), при чемъ въ этомъ послѣднемъ случаѣ приращеніе амплитуды разсматриваемой функціи $\psi(z)$, очевидно, будетъ: -2π.

Что̀ касается интеграловъ $[\xi'_k z'_k z''_k \xi''_k]$, входящихъ во вторую часть равенства (290) и отнесенныхъ къ нормальнымъ ортогональнымъ звеньямъ второго рода, то къ каждому такому интегралу $[\xi' z' z'' \xi'']$ примѣняются замѣчанія, преобразованія и формулы, указанныя въ § 9 и окончательно рѣшающія нашу задачу. При этомъ, примѣняя къ интегралу $[\xi' z' z'' \xi'']$ то или другое изъ преобразованій (172), нужно въ уравненіи (177) избрать значеніе многозначной функціи $\Theta(z)$ такъ, чтобы величина η, опредѣляемая первымъ изъ равенствъ (179), была *положительною*. Если правило это поставимъ въ связь съ вы-

шеуказаннымъ положеніемъ уникурсальной ортогональной вѣтви $O\zeta$ относительно ортогональныхъ звеньевъ $\xi'\zeta$ и $\zeta\xi''$, то придемъ къ заключенію, что указанное значеніе функціи $\Theta(z)$ нужно избрать такъ, чтобы для точки z_1 вѣтви $O\zeta$ количество

$$y_1 = \frac{z_1 - \zeta}{\Theta(z_1)}$$

имѣло амплитуду, равную $\Omega = -\frac{\pi}{\nu}$, при чемъ точка z_1 можетъ быть взята *та самая*, которая выше уже послужила для обслѣдованія главной или подглавной точки ζ и которая изображаетъ величину опредѣляемую такъ:

$$z_1 = S(t_1),\ t_1 = (1 - \varepsilon)\,T,\ T = \frac{1}{\psi(\zeta)},$$

гдѣ ε есть весьма малая положительная величина и $S(t)$ опредѣляется равенствомъ (286).

Въ приложеніяхъ имѣетъ значеніе преимущественно тотъ случай, когда функція

$$f(z) = \frac{G'(x+z)}{2\pi i}$$

голоморфна въ области каждой изъ главныхъ и подглавныхъ точекъ и не обращается для этихъ точекъ въ нуль. Такой случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ Теоріи Вѣроятностей. При такихъ условіяхъ $f(z)$ имѣетъ форму (167), въ которой $\beta = 1$, и къ разсматриваемому интегралу $[\xi'z'z''\xi'']$ непосредственно примѣняется любая изъ формулъ (202), (213) и (224), полагая въ ней $\beta = 1$.

Такимъ образомъ, напримѣръ, формула (202) съ относящимися къ ней формулами (195′) и (202$_1$) даютъ:

$$[\xi'z'z''\xi''] = \psi^m(\zeta)\left\{ H(\zeta)\,\frac{u_0\,\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu\, m^{\frac{1}{\nu}}} + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{1}{1.2...k}\,\frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}}\cdot\frac{u_k.\,\Gamma\left(\frac{1+k}{\nu}\right)}{\nu\, m^{\frac{1+k}{\nu}}} + \Delta_s\right\}, \tag{292}$$

гдѣ

$$u_k = e^{-\frac{2\pi(1+k)i}{\nu}} - 1 = \frac{2}{i}\, e^{-\frac{\pi(1+k)i}{\nu}} \sin\frac{\pi(1+k)}{\nu},$$

$$\Theta(z) = \left\{\frac{(z-\zeta)^\nu}{\lg\psi(\zeta) - \lg\psi(z)}\right\}^{\frac{1}{\nu}},$$

$$H(z) = \frac{\Theta^2(z) f(z)}{\Theta(z) - (z-\zeta)\,\Theta'(z)},$$

$$\Delta_s = \rho_s + H(\zeta) u_0 \delta'_0 + \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{u_k \delta'_k}{1\,.\,2 \ldots k} \frac{d^{k-1}\{H'(\zeta)\,\Theta^k(\zeta)\}}{d\zeta^{k-1}},$$

$$\rho_s = \lambda\,.\,\frac{r}{s}\,.\,\frac{N.M^s.\Phi(\eta)}{1-\eta^\nu M^\nu}\,.\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{\nu}\right)}{\nu\, m^{\frac{1+s}{\nu}}}, \quad |\lambda| < 1,$$

$$\Phi(\eta) = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{s c_{k+s}}{s+k} M^k \eta^k, \quad c_k = |u_k| = 2\sin\frac{(1+k)\pi}{\nu};$$

при чемъ предѣлы количествъ δ'_k опредѣляются помощью неравенствъ (199) и (199′) при условіи: $\beta = 1$; r менѣе разстоянія точки ζ отъ ближайшей изъ особыхъ точекъ функцій $\Theta(z)$ и $H(z)$; M и N суть модули maximum maximorum функцій:

$$\frac{1}{r}\Theta(\zeta + re^{\omega i}) \text{ и } H'(\zeta + re^{\omega i})$$

при возрастаніи ω отъ 0 до 2π. Къ этимъ формуламъ присоединяется условіе:

$$\eta M < 1, \tag{292'}$$

необходимое для примѣненія теоремы Коши-Руше, которая приводитъ къ вышеуказанному выраженію ρ_s.

Само собою разумѣется, что легко можемъ распространить при настоящихъ условіяхъ на данный случай формулу (193'''), свободную отъ ограниченій условіями сходимости Лагранжева ряда, примѣненнаго къ функціи $H(z)$.

Въ изложенныхъ выводахъ и формулахъ заключается богатый матеріалъ для примѣненія къ Теоріи Вѣроятностей, приводящій къ результатамъ, отчасти затронутымъ въ моемъ мемуарѣ: «*Общія свойства массовыхъ независимыхъ случайныхъ явленій въ связи съ приближеннымъ вычисленіемъ функцій весьма большихъ чиселъ*». При этомъ теоремы, приведенныя въ этомъ мемуарѣ, легко пополнить формулами для оцѣнки предѣловъ погрѣшностей приближенныхъ выраженій, кои разсматриваются въ этихъ теоремахъ.

Небесная Механика также можетъ пользоваться этими выводами, приспособляя ихъ къ своимъ задачамъ, въ которыхъ важную роль играютъ общія замѣчанія, указанныя въ n^0 39.

§ 12. **Исчисленіе приближенныхъ выраженій интеграловъ вида (1), какъ средство для облегченія вычисленія функцій при помощи безконечныхъ рядовъ. Связь разсматриваемаго исчисленія съ общею теоріей дифференціальныхъ уравненій и важная роль особыхъ точекъ интеграловъ этихъ уравненій.**

n^0 39. Вычисленіе функцій помощію безконечныхъ рядовъ, которое иногда является неизбѣжнымъ, сопряжено, особенно вблизи границъ области ихъ сходимости, съ трудностями и нуждается въ средствахъ для облегченія. Безъ такихъ облегченій не можетъ, напримѣръ, обойтись Небесная Механика, вынужденная прибѣгать къ безконечнымъ рядамъ въ виду невозможности точно интегрировать уравненія движенія центра тяжести тѣла солнечной системы, притягиваемаго, кромѣ солнца, другими менѣе значительными массами.

Разсматриваемое приближенное вычисленіе вообще отвѣчаетъ на такую нужду, давая средства для облегченія вычисленія количествъ, представленныхъ посредствомъ безконечныхъ рядовъ, при недостаточной быстротѣ сходимости этихъ рядовъ. Цѣль

точками, въ основѣ котораго лежитъ *аналитическое продолженіе* количества z, какъ функціи модуля $\psi(z)$, изъ области точки $z=0$ въ области главныхъ точекъ, можно рѣшить при помощи одного и того же указаннаго ниже Лагранжева ряда $S(t)$, расположеннаго по степенямъ t, не выходя за предѣлы его круга сходимости. Заключеніе это подтверждается само собою послѣдующимъ изложеніемъ.

Предположимъ сначала, что функція $f(z)\psi^m(z)$ не имѣетъ въ конечной области плоскости коплекснаго перемѣннаго z такихъ особыхъ точекъ z, для которыхъ функція $\psi(z)$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. При этихъ условіяхъ главныя и подглавныя точки искомаго основного пути Λ выбираются исключительно изъ числа корней уравненія: $\psi'(z)=0$, *причемъ отысканіе главныхъ точекъ ставится въ непосредственную связь съ изысканіемъ необходимыхъ и достаточныхъ условій сходимости ряда Лагранжа:*

$$z=S(t)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{t^k}{1.2\ldots k}\,\frac{d^{k-1}\{\varphi^k(x)\}}{dx^{k-1}}\,. \qquad (286)$$

Всѣ выводы, какъ общіе, такъ и частные, кои относятся къ этому изысканію и изложены въ статьѣ «Рядъ Лагранжа», могутъ намъ послужить на пользу при построеніи искомаго основного пути Λ на модулярной поверхности.

Пусть $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ будутъ корни уравненія $\psi'(z)=0$ и пусть корни эти размѣщены въ порядкѣ пониженія ихъ уровней, т. е.

$$|\psi(\mathfrak{z}_1)| \geqq |\psi(\mathfrak{z}_2)| \geqq |\psi(\mathfrak{z}_3)| \geqq \ldots. \qquad (286')$$

Обозначимъ чрезъ $T_1, T_2, T_3, \ldots$ значенія t, соотвѣтствующія значеніямъ z, совпадающимъ съ величинами $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$, такъ что

$$T_s=\frac{\mathfrak{z}_s}{\varphi(x+\mathfrak{z}_s)}=\frac{1}{\psi(\mathfrak{z}_s)}=\frac{1}{\varphi'(x+\mathfrak{z}_s)}\,,\ s=1,2,3,\ldots \qquad (286'')$$

При изысканіи условій сходимости ряда $S(t)$, опредѣляемаго равенствомъ (286), мы должны выбрать изъ числа величинъ

T_1, T_2, T_3, ... такъ называемыя *критическія* значенія t, кои лежатъ на окружности C круга сходимости ряда $S(t)$. Этимъ значеніямъ $t = T$ соотвѣтствуютъ главныя точки $z = \mathfrak{z}$. Изысканіе ведется по слѣдующему общему плану [1]).

Рядъ $S(t)$ будетъ сходящимся, если $|\,t\,| < |\,T_1\,|$. Если величина $S(\lambda T_1)$ при возрастаніи λ отъ 0 до 1 будетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ $\mathfrak{z}_1$, то T_1 не будетъ критическимъ значеніемъ t и $\mathfrak{z}_1$ не будетъ главною точкою основного пути Λ. Критическое значеніе t нужно искать въ ряду величинъ: T_2, T_3, ... Если величина $S(\lambda T_2)$ при возрастаніи λ отъ 0 до 1 не будетъ стремиться къ $\mathfrak{z}_2$, то и T_2 не будетъ критическимъ значеніемъ t, а $\mathfrak{z}_2$ не будетъ главною точкою искомаго основного пути Λ. Критическое значеніе t нужно искать въ ряду величинъ: T_3, T_4, ... Продолжая это изысканіе, мы должны дойти до такого значенія T_i, для котораго рядъ $S(\lambda T_i)$ остается сходящимся при возрастаніи λ отъ 0 до 1 и величина $S(\lambda T_i)$ стремится къ $\mathfrak{z}_i$, когда λ, возрастая, стремится къ 1. Въ такомъ случаѣ величина T_i есть критическое значеніе t и $\mathfrak{z}_i$ есть главная точка искомаго основного пути Λ. Другія главныя точки того же пути (если таковыя существуютъ) обладаютъ такими же свойствами, какъ точка $\mathfrak{z}_i$

Трудности этого общаго плана, допускающаго значительныя упрощенія лишь въ частныхъ случаяхъ, заключаются въ томъ, что рѣшеніе вопроса сводится имъ къ вычисленію безконечнаго ряда $S(t)$ при положеніи точки t на самой окружности C круга сходимости. Вообще эти трудности могутъ быть облегчены отчасти лишь при посредствѣ пріема, основаннаго на томъ соображеніи, что при маломъ положительномъ значеніи ε и при $t_1 = (1 - \varepsilon)\,T$ точка z_1, изображающая величину $z_1 = S(t_1)$, должна быть близкою къ точкѣ $\mathfrak{z}$ и уникурсально соединимою съ $\mathfrak{z}$, если точка $\mathfrak{z}$ есть главная (такъ какъ при этомъ условіи должна существовать уникурсальная вѣтвь $O\mathfrak{z}$ кривой N_3). Вычисленіе такой величины z_1, достаточное для нашихъ цѣлей, легче, нежели вычисленіе величины $S(T)$, по

[1]) См. „Рядъ Лагранжа“, гл. I, § 8.

тому, что точка t_1 лежитъ *внутри* круга сходимости, а не на его окружности [1]). При этомъ вопросъ объ уникурсальной соединимости точекъ z_1 и $\mathfrak{z}$ рѣшается помощію вычисленія корней $z'_0, z'_1, \ldots, z'_{\nu-1}$ уравненія

$$z = t_1 \varphi(x + z),$$

обращающихся въ $z = \mathfrak{z}$ при $t_1 = (1-\varepsilon) T = T$ (иначе, при $\varepsilon = 0$) и приближенно опредѣляемыхъ посредствомъ формулы (164′), полагая въ ней $\zeta = \mathfrak{z}$ и

$$y = \lg\{t_1 \psi(\mathfrak{z})\} = \lg \frac{z_1 \varphi(x + \mathfrak{z})}{\mathfrak{z}\, \varphi(x + z_1)}$$

и вычисляя H по формулѣ (145) [ν есть показатель кратности корня $z = \mathfrak{z}$ уравненія $z = T\varphi(x + z)$]. Если точки z_1 и $\mathfrak{z}$ уникурсально соединимы, то одинъ изъ указанныхъ корней z'_0, $z'_1, \ldots, z'_{\nu-1}$ долженъ совпадать съ z_1. Если же такого совпаденія не окажется, то точка $\mathfrak{z}$ не есть уникурсально соединимая съ O и, слѣдовательно, не есть главная.

Замѣтимъ, что положеніе указанной сейчасъ точки z_1 играетъ *важную роль при опредѣленіи конструкціи ортогональнаго основного пути* Λ *вблизи точки* $z = \mathfrak{z}$, если $\mathfrak{z}$ окажется главною точкою. При помощи этой точки z_1 рѣшается вопросъ, *какія именно нисходящія вѣтви развѣтвляющейся ортогональной линіи* $N_{\mathfrak{z}}$, *проходящей чрезъ точку* $\mathfrak{z}$, *войдутъ въ составъ этого пути* Λ. Въ самомъ дѣлѣ точкою z_1 опредѣляется въ области точки $\mathfrak{z}$ та изъ *восходящихъ* отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныхъ вѣтвей, которая уникурсально соединяетъ вершину O съ точкою $\mathfrak{z}$. Эта ортогональная вѣтвь $O\mathfrak{z}$, какъ указано выше (см. *nn*° 26 и 28) и полнѣе выяснено въ главѣ III статьи «Рядъ Лагранжа» (см. § 15, «Правило»), опредѣляетъ *двѣ* нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныя вѣтви, кои равно наклонены къ вѣтви $O\mathfrak{z}$, образуя съ нею уголъ $\frac{\pi}{\nu}$. Эти двѣ нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$

[1]) Для облегченія вычисленія ряда $S(t_1)$ въ разсматриваемомъ процессѣ опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ основного пути Λ, къ сожалѣнію, нельзя примѣнить пріемовъ, указанныхъ въ *n*° 39, ибо эти пріемы сами нуждаются въ предварительномъ построеніи основного пути Λ.

ортогональныя вѣтви и должны войти въ составъ пути Λ, какъ его *главныя* части, прилегающія къ главной точкѣ $\mathfrak{z}$.

Зная главныя точки, будемъ имѣть для нихъ значеніе модуля функціи $\psi(z)$, которое представитъ величину K_1, и будемъ знать радіусъ ρ круга сходимости ряда $S(t)$, представляющійся такъ:

$$\rho = \frac{1}{K_1}.$$

Переходя къ подглавнымъ точкамъ, напомнимъ, что онѣ должны лежать внѣ найденнаго круга сходимости, но весьма близко къ его окружности C. Слѣдовательно, подглавною точкою можетъ быть лишь такая точка $\mathfrak{z}$, которая принадлежитъ къ точкамъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и для которой модуль величины T, опредѣляемой соотвѣтствующимъ равенствомъ (286″), болѣе ρ, но весьма близокъ къ ρ. Если $\mathfrak{z}$ удовлетворяетъ этимъ признакамъ, то нужно еще убѣдиться въ томъ, что она уникурсально соединима съ точкою O. Для этой цѣли возможно опять воспользоваться вышеуказаннымъ рядомъ $S(t)$, вообразивъ точку t_1 пересѣченія прямой OT съ окружностью C и затѣмъ разсмотрѣвъ величину $z_1 = S(t_1)$. Точка $\mathfrak{z}$ будетъ подглавною лишь въ томъ случаѣ, если точка z_1 не есть главная и если притомъ точка z_1 уникурсально соединима съ точкою $\mathfrak{z}$. Уникурсальная соединимость точекъ z_1 и $\mathfrak{z}$ опредѣляется легко, ибо эти точки, при возможности уникурсальнаго соединенія, будутъ *весьма близкими* другъ къ другу. Рѣшая этотъ вопросъ, нужно слѣдовать тому же порядку, какой сейчасъ указанъ для главной точки. При этомъ указанная точка z_1 играетъ важную роль также при изслѣдованіи конструкціи основного пути Λ вблизи подглавной точки $\mathfrak{z}$, опредѣляя тѣ двѣ нисходящія отъ точки $\mathfrak{z}$ ортогональныя вѣтви, кои должны войти въ составъ этого пути, какъ его главныя части, прилегающія къ $\mathfrak{z}$. Роль эта вполнѣ аналогична той, какая выяснена сей часъ при разсмотрѣніи главной точки.

При трудности изложеннаго общаго плана опредѣленія главныхъ и подглавныхъ точекъ пріобрѣтаютъ значеніе различные

менѣе общіе, но болѣе простые признаки этихъ точекъ. Многіе такіе признаки даны въ различныхъ мѣстахъ статьи: «Рядъ Лагранжа» (см. гл. I, §§ 9, 10, 11, 15; гл. III, § 21). Эти признаки въ сущности сводятся къ особеннымъ частнымъ признакамъ возможности или невозможности уникурсальнаго соединенія точки O съ тѣми или другими точками $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и иногда доводятъ вопросъ объ отысканіи главныхъ точекъ до крайней простоты, какъ это представляется, напримѣръ, въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ n^0 7 и имѣющемъ важное значеніе въ Теоріи Вѣроятностей. Въ этомъ случаѣ уникурсальная соединимость главныхъ точекъ съ точкою O очевидна, причемъ уникурсальными вѣтвями, соединяющими точку O съ главными точками, будутъ, какъ легко убѣдиться, ортогональныя линіи, кои проектируются на плоскость комплекснаго перемѣннаго z *прямолинейными* отрѣзками.

Отыскавъ главныя и подглавныя точки основного пути Λ и количество K_1, выяснимъ затѣмъ порядокъ опредѣленія *нормальнаго* значенія количества K_2 (см. n^0 25) и соотвѣтствующихъ ему нормальныхъ точекъ того же пути. Съ этою цѣлью опять обратимся къ вышеуказаннымъ точкамъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ и выдѣлимъ изъ нихъ тѣ, *кои уникурсально соединимы съ полюсомъ* O. Пусть эти точки будутъ: $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ Въ числѣ указанныхъ точекъ $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ находятся всѣ главныя и подглавныя точки основного пути Λ. Вообразимъ еще тѣ изъ точекъ $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$, кои уникурсально соединимы съ этими главными и подглавными точками и лежатъ на указанныхъ выше вѣтвяхъ, входящихъ въ составъ пути Λ, и присоединимъ такія точки, если онѣ существуютъ, къ точкамъ $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ Затѣмъ изъ числа всѣхъ этихъ точекъ $\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \ldots$ исключимъ главныя и подглавныя, а изъ остальныхъ указанныхъ точекъ изберемъ тѣ, кои лежатъ въ *наивысшемъ* уровнѣ, т. е. для которыхъ модуль $\psi(z)$ пріобрѣтаетъ наибольшее значеніе. Эти точки суть искомыя *нормальныя*, а соотвѣтствующій имъ модуль $\psi(z)$ представляетъ искомое нормальное значеніе K_2.

Процессъ опредѣленія нормальнаго значенія количества K_2, какъ видно изъ вышеуказаннаго, вообще еще болѣе труденъ,

чѣмъ опредѣленіе главныхъ и подглавныхъ точекъ, ибо этотъ процессъ требуетъ аналитическаго продолженія функціи $z=S(t)$, опредѣляемой равенствомъ (286), за предѣлы круга сходимости на *конечное* разстояніе отъ окружности C. Но въ этомъ случаѣ дѣло вообще упрощается тѣмъ, что для успѣшнаго рѣшенія вопроса о приближенномъ вычисленіи интеграла (285) не представляется безусловной необходимости имѣть нормальное значеніе K_2. Достаточно имѣть какое нибудь значеніе K_2, удовлетворяющее первому главному условію (n^0 4), и какой нибудь хорошо направленный основной путь Λ, соотвѣтствующій этому значенію K_2.

Вообразимъ затѣмъ нормальныя звенья второго рода (см. n^0 25), принадлежащія ортогональному основному пути Λ. Если $\xi'\xi''$ есть такое звено, соотвѣтствующее главной или подглавной точкѣ ζ, то, какъ мы выше видѣли, его ортогональныя вѣтви $\xi'\zeta$ и $\zeta\xi''$ характеризуются тѣмъ, что уголъ 2Ω между ними дѣлится ортогональной вѣтвью $O\zeta$ пополамъ, при чемъ абсолютная величина этого угла опредѣлена выше. Но мы должны также принять во вниманіе направленіе первоначальнаго пути (O), которое считается положительнымъ. Въ такомъ случаѣ уголъ 2Ω будетъ отрицательнымъ, т. е. $2\Omega = -\frac{2\pi}{\nu}$, гдѣ ν есть показатель кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$.

Предположимъ теперь, что функція $G(x+z)$ и, слѣдовательно, функція $f(z)$ имѣетъ особыя точки, соотвѣтствующія такимъ конечнымъ значеніямъ z, для которыхъ функція $\psi(z)$ не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность. Если всѣ эти точки лежатъ внѣ площади, выдѣляемой найденною кривою Λ, то эта кривая попрежнему останется основнымъ путемъ. Но если нѣкоторыя особыя точки функціи $G(x+z)$ будутъ подниматься постепенно все выше и выше, вступивъ въ область, ограниченную кривою Λ, то сначала онѣ измѣнятъ ортогональный основной путь Λ, повліявъ на нормальное значеніе K_2, потомъ могутъ сдѣлаться подглавными, затѣмъ главными точками на ряду съ прежними и, наконецъ, сдѣлаются такими главными,

жемъ при посредствѣ разсматриваемаго исчисленія ускорят[illegible] суммированіе рядовъ, опредѣляющихъ интегралы дифферен[illegible] альнаго уравненія, хотя бы перемѣнныя подходили къ сами[illegible] границамъ области ихъ сходимости.

Но для такого примѣненія исчисленія еще не достаточно [illegible] особыя точки интеграловъ дифференціальныхъ уравненій [illegible] слѣдовать ихъ форму въ области этихъ точекъ. Необходимо [illegible] связать значенія каждаго интеграла въ данной области съ его[illegible] значеніями въ областяхъ тѣхъ особыхъ точекъ, кои, въ ка[illegible] ствѣ главныхъ и подглавныхъ, вліяютъ на приближенныя вы[illegible] раженія членовъ разложенія интеграла въ первой области. Эта связь устанавливается, какъ сейчасъ сказано, *аналитическимъ продолженіемъ* этихъ интеграловъ изъ одной области въ другую.

Трудности этой послѣдней задачи, т. е. аналитическаг[illegible] продолженія функцій изъ одной области въ другую, въ об[illegible] щемъ случаѣ представляются болѣе значительными, чѣмъ опредѣленіе особыхъ точекъ интеграловъ и изслѣдованіе ихъ формы въ отдѣльныхъ областяхъ этихъ особыхъ точекъ. Такъ, общая теорія линейныхъ, дифференціальныхъ уравненій, предложенная Фуксомъ, легко разрѣшаетъ вопросы объ особыхъ точкахъ интеграловъ; но въ тѣхъ пунктахъ этой теоріи, кои относятся къ аналитическому продолженію интеграловъ, Фуксовы упрощенія этой задачи встрѣтили препятствія [1]).

Вообще современная обширная литература по дифференціальнымъ уравненіямъ, занимающаяся изслѣдованіемъ интеграловъ въ областяхъ ихъ особыхъ точекъ и связывающая значенія этихъ интеграловъ для различныхъ областей аналитическимъ

---

[1]) Объ аналитическомъ продолженіи функцій и о трудностяхъ, встрѣчающихся въ этой задачѣ при разрѣшеніи ея способомъ Фукса, трактуется въ слѣдующихъ мемуарахъ.

Fuchs „Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, inbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen“. Crelle's Journ., Bd. LXXV, S. 177—223.

П. А. Некрасовъ, „О предѣльномъ кругѣ Фукса“. Матем. Сборн., т. XIV.

ихъ продолженіемъ, даетъ важнѣйшее подспорье разсматриваемому исчисленію, которое въ свой чередъ облегчаетъ вычисленіе интеграловъ въ остальныхъ областяхъ.

Въ приложеніяхъ къ функціямъ, опредѣляющимъ явленія природы, перемѣнное обыкновенно бываетъ *дѣйствительнымъ*. Въ этихъ случаяхъ изслѣдованіе особыхъ точекъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій можно ограничить лишь такими особыми точками, кои оказываются ближайшими къ тѣмъ или другимъ точкамъ *дѣйствительной оси*. Эти особыя точки должны бы сосредоточивать на себѣ преимущественное вниманіе авторовъ, занимающихся дифференціальными уравненіями динамики. Остальныя особыя точки могутъ быть устранены изъ разсмотрѣнія, что̀ облегчаетъ дѣло.

При устраненіи трудностей, связанныхъ съ аналитическимъ продолженіемъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, пріобрѣтаютъ важное значеніе частные пріемы, кои сводятъ задачу интегрированія дифференціальнаго уравненія къ примѣчательнымъ формамъ, напримѣръ, къ опредѣленнымъ интеграламъ, хотя бы эти послѣдніе интегралы, сами по себѣ, были сложны. Примѣръ такого изслѣдованія особыхъ точекъ данъ въ моей статьѣ: «*Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ*» [1]).

§ 13. Формулы интерполированія и механическихъ квадратуръ и приложеніе къ нимъ разсматриваемаго исчисленія; законы сходимости и расходимости этихъ формулъ.

n° 41. Перейдемъ теперь къ *формуламъ интерполированія*, а также коснемся *механическихъ квадратуръ*.

Разсматриваемое исчисленіе обогащаетъ теорію интерполированія важными понятіями и выводами.

1889. Москва. „Ueber den Fuchschen Grenzkreis". Mathematische Annalen, Bd. XXXIX. Leipzig.

В. А. Анисимовъ, „Предѣльный кругъ Фукса и его приложенія". Варшава. 1892.

[1]) См. Математическій Сборникъ, т. XV.

Слѣдуя *Эрмиту* [1]), разсмотримъ одно обобщеніе формулы Тейлора, приводящее къ *такимъ* формуламъ интерполированія, погрѣшности которыхъ выражаются интегральными вычетами, приводимыми къ виду (1). Эти интегральные вычеты, слѣдовательно, допускаютъ примѣненіе разсматриваемаго исчисленія, а въ результатѣ такого примѣненія получаются не только предѣлы погрѣшностей формулъ интерполированія, но и приближенныя выраженія этихъ погрѣшностей, кои содержатъ въ себѣ *болѣе ничтожную* погрѣшность. Иначе говоря, примѣненіе къ этимъ интегральнымъ вычетамъ разсматриваемаго исчисленія можетъ повысить точность вычисленій подобно тому, какъ, напримѣръ, въ n^0 39 (пункт. II) интегральный вычетъ (304) послужилъ къ облегченію вычисленія функціи $\Phi(x+h)$, опредѣляемой по формулѣ Тейлора.

Кромѣ того, примѣненіе разсматриваемаго исчисленія къ вышеупомянутымъ вычетамъ ставитъ и строго рѣшаетъ еще не вполнѣ выясненный вопросъ объ условіяхъ *годности* и *негодности* (иначе, *сходимости* и *расходимости*) соотвѣтствующихъ интерполяціонныхъ формулъ. Изъ этихъ условій обыкновенно указываются нѣкоторыми авторами лишь простѣйшія и только достаточныя. Такого рода указанія можно найти, напримѣръ, въ мемуарѣ *А. Ю. Давидова:* «Объ одной общей формулѣ въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ» (Математическій Сборникъ, т. X, 1882) и въ упомянутомъ выше курсѣ *Эрмита*. Но нѣкоторые русскіе математики совершенно пренебрегаютъ этими условіями. Такъ, этотъ важный вопросъ упущенъ изъ виду, напримѣръ, въ сочиненіи *А. А. Маркова* «Исчисленіе конечныхъ разностей» (Отд. I. С.-Петербургъ. 1889), хотя авторъ, повидимому, желалъ дать въ своемъ сочиненіи систематическое и полное изложеніе основъ теоріи интерполированія и механическихъ квадратуръ.

Вообразимъ замкнутую кривую S, ограничивающую сплошную односвязную площадь, внутри которой находятся неподвижныя

---

[1]) См. „Cours de M. Hermite, professé pendant le 2-e semestre 1881—82“, rédidigé par *M. Andoyer*. Second tirage, revu par *M. Hermite,* pp. 76—77. Paris. 1883.

точки $a, b, c, \ldots, l$ и подвижная точка x. Обозначимъ чрезъ $\varphi(z)$ функцію голоморфную въ области, ограниченной кривою S, и положимъ:

$$F(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-l)^{\lambda}, \tag{310}$$

гдѣ показатели $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ суть цѣлыя положительныя числа. Затѣмъ разсмотримъ интегралъ:

$$R = \int_{(S)} \frac{\varphi(z)\, F(x)}{2\pi i\,(z-x)\,F(z)}\, dz. \tag{311}$$

Этотъ интегралъ представитъ остаточный членъ ряда Тейлора, если сдѣлаемъ частное предположеніе: $F(z) = (z-a)^{\alpha}$.

Въ общемъ случаѣ теорія интегральныхъ вычетовъ, примѣненная къ интегралу (311), обнаруживаетъ слѣдующее. Вообразимъ безконечно малыя окружности (a), (b), $(c), \ldots, (l)$ и (x), описанныя изъ соотвѣтствующихъ центровъ $a, b, c, \ldots, l$ и x. Будемъ имѣть:

$$R = \int_{(a)} + \int_{(b)} + \int_{(c)} + \ldots + \int_{(l)} + \int_{(x)}, \tag{312}$$

гдѣ интегрируемая функція, которая должна стоять подъ знаками интеграловъ, подразумѣвается.

Всѣ интегралы, стоящіе во второй части равенства (312), получаются по одному и тому же плану. Разсмотримъ первый изъ нихъ. Изъ вышеуказанныхъ предположеній относительно функцій $\varphi(z)$ и $F(z)$ слѣдуетъ, что для точекъ z окружности (a) функція

$$\frac{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)}{F(z)}$$

разлагается по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $(z-a)$. Слѣдовательно

$$\frac{\varphi(z)}{F(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(z-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + \ldots$$

Далѣе для точекъ z окружности (a) имѣемъ:

$$\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x-a}+\frac{z-a}{(x-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}+\ldots$$

Имѣя эти разложенія, можемъ найти коеффиціентъ при $\frac{1}{z-a}$ въ разложеніи функціи

$$\frac{\phi(z)\,F(x)}{(z-x)\,F(z)}$$

по степенямъ $z-a$, каковой коеффиціентъ представитъ первый изъ интеграловъ, стоящихъ во второй части равенства (312). Итакъ,

$$\int_{(a)}=-\left\{\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\right\}F(x). \quad (313)$$

Очевидно, вторая часть равенства (313) есть *цѣлый* полиномъ.

Распространяя формулу (313) на каждый изъ интеграловъ, стоящихъ во второй части равенства (312), кромѣ послѣдняго, затѣмъ складывая результаты, получимъ:

$$\int_{(a)}+\int_{(b)}+\ldots+\int_{(l)}=-\Phi(x), \quad (314)$$

гдѣ $\Phi(x)$ есть *цѣлый* полиномъ степени $\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1$. Сверхъ того имѣемъ:

$$\int_{(x)}=\phi(x). \quad (315)$$

Изъ равенствъ (310), (311), (312), (313), (314) и (315) слѣдуетъ, что

$$\phi(x)=\Phi(x)+R, \quad (316)$$

гдѣ

$$R=\frac{1}{2\pi i}\int_{(S)}\frac{\phi(z)}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^\alpha\left(\frac{x-b}{z-b}\right)^\beta\ldots\left(\frac{x-l}{z-l}\right)^\lambda dz. \quad (317)$$

Легко видѣть, что функція $\mathcal{F}(x)$ и полиномъ $\Phi(x)$ удовлетворяютъ условіямъ:

$$\Phi(a)=\mathcal{F}(a),\ \Phi'(a)=\mathcal{F}'(a),\ldots,\ \Phi^{(\alpha-1)}(a)=\mathcal{F}^{(\alpha-1)}(a),$$

$$\Phi(b)=\mathcal{F}(b),\ \Phi'(b)=\mathcal{F}'(b),\ldots,\ \Phi^{(\beta-1)}(b)=\mathcal{F}^{(\beta-1)}(b),$$

. . . .

$$\Phi(l)=\mathcal{F}(l),\ \Phi'(l)=\mathcal{F}'(l),\ldots,\ \Phi^{(\lambda-1)}(l)=\mathcal{F}^{(\lambda-1)}(l).$$

Формула (316) выражаетъ приближенно функцію $\mathcal{F}(x)$ посредствомъ полинома $\Phi(x)$, при чемъ R есть погрѣшность.

Но не слѣдуетъ упускать изъ виду, что при весьма большомъ значеніи суммы $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ эта погрѣшность R не всегда будетъ малою величиною; эта погрѣшность будетъ малая лишь въ томъ случаѣ, *если соблюдены нѣкоторыя условія.*

Легко видѣть, какъ это указано, напримѣръ, въ упомянутомъ выше курсѣ Эрмита, что погрѣшность R будетъ малою, если для всѣхъ точекъ z кривой S имѣютъ силу неравенства:

$$|x-a|<|z-a|,\ |x-b|<|z-b|,\ldots,\ |x-l|<|z-l|,$$

т. е. если окружности, описанныя изъ центровъ $a, b, \ldots, l$ и проходящія чрезъ точку x, лежать всѣ *внутри* площади, ограниченной кривою S. Но это условіе только достаточное.

Примѣняя начала разсматриваемаго исчисленія къ интегралу (317), мы получимъ условія, *необходимыя* и *достаточныя* для годности интерполяціонной формулы (316).

Пусть

$$m=\alpha+\beta+\ldots+\lambda. \tag{318}$$

Положимъ:

$$\psi(z)=\left\{\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-b}{z-b}\right)^{\beta}\ldots\left(\frac{x-l}{z-l}\right)^{\lambda}\right\}^{\frac{1}{m}}, \tag{319}$$

$$f(z)=\frac{\mathcal{F}(z)}{2\pi i(z-x)}. \tag{320}$$

При этихъ обозначеніяхъ равенство (317) получаетъ видъ:

$$R = \int_{(S)} f(z)\,\psi^m(z)\,dz, \qquad (321)$$

къ которому можемъ примѣнять разсматриваемое исчисленіе.

Это примѣненіе требуетъ изученія особыхъ точекъ функціи $\phi(z)$ и ея разложеній въ области этихъ точекъ, а также опредѣленія корней уравненія $\psi'(z) = 0$.

Пусть особыя точки функціи $\phi(z)$ и корни уравненія $\psi'(z) = 0$ найдены, а также построенъ основной путь Λ, эквивалентный пути S. Главныя точки пути Λ, какъ легко убѣдиться, не зависятъ отъ x.

Прежде всего обратимъ вниманіе на соотвѣтствующее основному пути Λ количество

$$K_1 = |\,\psi(\zeta)\,|, \qquad (321')$$

гдѣ ζ есть главная точка. Приближенная величина интеграла (321) представится такъ:

$$R = K_1^{\,m} \,.\, f_1(x). \qquad (322)$$

гдѣ $f_1(x)$ есть зависящая отъ x величина *конечнаго* порядка относительно $\frac{1}{m}$. Отсюда видно, что количество K_1 имѣетъ рѣшающее значеніе въ вопросѣ о годности или негодности формулы (316).

Если количество K_1 окажется *менѣе* 1 на конечную величину, то формула (316) интерполированія будетъ годною для полученія приближеннаго выраженія функціи $\phi(x)$, такъ какъ погрѣшность R, какъ показываетъ вторая часть равенства (322), будетъ малою величиною порядка $\sigma = +\infty$ относительно $\frac{1}{m}$. Если $K_1 > 1$, то, наоборотъ, погрѣшность R будетъ большою величиною, стремящеюся къ безконечности, и поэтому, формула (316) *совершенно не годна для того, чтобы функцію $\Phi(x)$ принять за приближенную величину функціи $\phi(x)$*. Наконецъ, при

значеніи K_1, хотя и меньшемъ 1, но весьма близкомъ къ 1, а также при $K_1 = 1$, формула (316) можетъ быть годною, но чувствительность ея будетъ зависѣть отъ детальныхъ свойствъ интегрируемой функціи $f(z)\,\psi^m(z)$, при чемъ вопросъ о годности или негодности формулы (316) въ этомъ случаѣ рѣшается окончательно приближеннымъ вычисленіемъ количества R, полезнымъ также для повышенія точности результата.

Эти замѣчанія показываютъ, что условія годности интерполяціонныхъ формулъ связаны тѣсно со свойствами основного пути Λ и, слѣдовательно, со свойствами лежащихъ на кривой Λ особыхъ точекъ функціи $\phi(z)$ и точекъ, изображающихъ корни уравненія: $\psi'(z) = 0$.

Пусть степень m полинома (310) неограниченно возрастаетъ. Условимся называть интерполяціонную формулу (316) *сходящеюся* или *расходящеюся*, смотря по тому, будетъ ли при возрастаніи m до ∞ членъ R стремиться къ нулю или нѣтъ. Изъ предшествующаго легко вывести законы сходимости интерполяціонной формулы (316). Такъ, *формула эта будетъ сходящеюся или расходящеюся, смотря по тому, будетъ ли вышеуказанная величина K_1 менѣе или болѣе 1.* При $K_1 = 1$ можно установить другіе, болѣе чувствительные признаки сходимости формулы (316), аналогичные болѣе чувствительнымъ признакамъ сходимости безконечныхъ рядовъ и, въ частности, ряда Тейлора, съ которымъ эта формула при извѣстныхъ обстоятельствахъ совпадаетъ.

Существуетъ на плоскости комплекснаго перемѣннаго z область, внутри которой лежатъ точки, изображающія тѣ значенія x, для которыхъ интерполяціонная формула (316) годная, а внѣ лежатъ точки, изображающія значенія x, для которыхъ формула (316) оказывается негодною. Эта область ограничивается нѣкоторою кривою W, точки z которой удовлетворяютъ уравненію:

$$\left|\frac{\psi(z)}{\psi(\zeta)}\right| = \left|\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{\zeta-b}{z-b}\right)^{\beta}\cdots\left(\frac{\zeta-l}{z-l}\right)^{\lambda}\right| = 1.$$

Развитіе этихъ выводовъ могло бы составить предметъ отдѣльной статьи. Сдѣлаемъ здѣсь по поводу этихъ выводовъ еще лишь слѣдующія замѣчанія.

Пусть всѣ количества $a, b, c, \ldots, l$ и x *дѣйствительныя*, какъ это бываетъ въ бо́льшей части разсматриваемыхъ авторами случаевъ. Предположимъ, что $a < b < c < \ldots < l$. Очевидно, всѣ корни уравненія $\psi'(z) = 0$ будутъ также дѣйствительными и размѣстятся въ промежуткахъ между a и b, b и $c, \ldots$. Пусть функція $\phi(z)$ не имѣетъ особыхъ точекъ, соотвѣтствующихъ дѣйствительнымъ величинамъ z, заключеннымъ въ предѣлахъ отъ a до l. При такихъ условіяхъ, какъ легко убѣдиться, вышеуказанную кривую S можно избрать такъ, что всѣ корни уравненія $\psi'(z) = 0$ будутъ лежать внутри площади, ограниченной этою кривою S и, слѣдовательно, кривою Λ, и, поэтому, главныя точки основного пути Λ будутъ зависѣть исключительно отъ особыхъ точекъ функціи $\phi(z)$. Поэтому при дѣйствительныхъ значеніяхъ $a, b, \ldots, l$ формула (316) будетъ безусловно годною, если функція $\phi(z)$ есть *цѣлая* (алгебраическая или трансцедентная), т. е. если фупкція $\phi(z)$ не имѣетъ особыхъ точекъ въ области конечныхъ значеній перемѣннаго z. Но если функція $\phi(z)$ имѣетъ особыя точки, то, хотя бы эти точки помѣщались внѣ прямолинейнаго отрѣзка al, при *неблагопріятномъ положеніи ихъ формула (316) можетъ оказаться негодною* (расходящеюся) *даже и въ этомъ случаѣ*, т. е. при дѣйствительныхъ значеніяхъ $a, b, \ldots, l$ и x. Авторы недостаточно обращаютъ вниманіе на это важное обстоятельство, которое показываетъ, что разсматриваемыя ими интерполяціонныя формулы иногда бываютъ *негодными*.

Само собою разумѣется, что погрѣшности, допускаемыя при *механическихъ квадратурахъ*, основанныхъ на примѣненіи интерполяціонной формулы (316), также могутъ быть изслѣдуемы и приближенно вычисляемы при помощи разсматриваемаго исчисленія. При этомъ такія формулы механическихъ квадратуръ могутъ оказаться иногда годными (сходящимися), а иногда не-

годными (расходящимися). Разсмотримъ условія ихъ годности и негодности, считая количества x и $\varphi(x)$ дѣйствительными.

Формула квадратуръ, соотвѣтствующая интерполяціонной формулѣ (316), имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\int_p^q \varphi(x)\,dx = \int_p^q \Phi(x)\,dx + \rho, \tag{322_1}$$

гдѣ ρ есть погрѣшность, представляемая такъ:

$$\rho = \int_p^q R\,dx. \tag{322_2}$$

Отсюда и изъ равенства (322) слѣдуетъ, что

$$\rho = \int_p^q f_1(x)\,\psi_1{}^m(x)\,dx, \tag{322_3}$$

гдѣ

$$\psi_1(x) = K_1 = |\psi(\zeta)| = \left|\left\{\frac{F(x)}{F(\zeta)}\right\}^{\frac{1}{m}}\right|, \tag{322_4}$$

при чемъ полиномъ $F(x)$ опредѣляется равенствомъ (310). Равенство (322_3) приводитъ опредѣленіе погрѣшности ρ къ приближенному вычисленію интеграла (1), отнесеннаго къ дѣйствительному перемѣнному и имѣющаго дѣйствительную интегрируемую функцію.

Порядокъ вычисленія интеграла вида (322_3) полнѣе разъясняется ниже (въ § 14). Приближенная величина погрѣшности ρ, находимая помощію такого вычисленія, представляется такъ:

$$\rho = \mathbf{K}_1^m \,.\, U, \tag{322_5}$$

гдѣ $\mathbf{K}_1$ есть maximum maximorum количества $\psi_1(x)$ или K_1 при измѣненіи x отъ p до q и U есть количество *конечнаго* порядка относительно $\frac{1}{m}$.

Теперь легко видѣть, что формула квадратуръ (322_1) будетъ *годною*, если $\mathbf{K}_1 < 1$, и *негодною*, если $\mathbf{K}_1 > 1$. При $\mathbf{K}_1 = 1$ вопросъ о годности или негодности разсматриваемой формулы квадратуръ разрѣшается болѣе точнымъ вычисленіемъ погрѣшности ρ, каковое вычисленіе при этомъ даетъ возможность повысить также точность приближеннаго выраженія искомаго интеграла

$$\int_p^q \mathcal{F}(x)\,dx.$$

Часто безъ всякой затраты труда на вычисленіе дополнительнаго члена ρ и лишь однимъ взглядомъ на размѣщеніе особыхъ точекъ функціи $\mathcal{F}(z)$ рѣшается вопросъ о непригодности данной формулы квадратуръ вышеуказаннаго вида. Такъ, формула Гаусса, принадлежащая къ разсматриваемому виду формулъ механическихъ квадратуръ и примѣненная къ вычисленію интеграла

$$\int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\{(x-133000{,}9)^2+0{,}01\}.\lg x}$$

въ порядкѣ, указанномъ на страницахъ 88 и 89 вышеупомянутой книжки А. А. Маркова, приведетъ къ грубымъ результатамъ, и было бы безполезной затратой значительнаго труда вычислять въ этомъ случаѣ предѣлы дополнительнаго члена по формулѣ, указанной въ той же книжкѣ А. А. Маркова.

Всѣ эти важныя соображенія, совершенно упущенныя въ сочиненіи *А. А. Маркова* «Исчисленіе конечныхъ разностей», показываютъ, что приводимыя въ этой книжкѣ выраженія дополнительныхъ членовъ годны лишь при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ; а вслѣдствіе отсутствія въ этомъ сочиненіи указанія другого критерія ихъ годности, кромѣ непосредственнаго вычисленія предѣловъ этихъ членовъ, упомянутыя упущенія могутъ

повести къ безполезнымъ труднымъ вычисленіямъ, отъ которыхъ предохраняютъ вышеуказанныя замѣчанія.

Замѣчанія эти основаны на сложныхъ умозрѣніяхъ и отвлеченныхъ разсужденіяхъ, необходимыхъ, однако, для того, чтобы осторожно перейти въ сферу дѣйствительныхъ вычисленій, съ которыми встрѣчается современный математическій анализъ. Математики, пренебрегающіе такими умозрѣніями и отвлеченными разсужденіями, нынѣ либо обречены постоянно впадать въ общія недоразумѣнія, либо должны вращаться лишь въ кругу простѣйшихъ вопросовъ и частныхъ исключительныхъ примѣровъ, мало продвигающихъ впередъ *коренные* вопросы математическаго естествознанія.

Замѣтимъ еще, что разсматриваемое исчисленіе примѣняется къ формуламъ интерполированія и механическихъ квадратуръ въ другомъ направленіи. Если оцѣнивать погрѣшности этихъ формулъ посредствомъ тѣхъ выраженій дополнительныхъ членовъ, кои Н. Я. Сонинъ и А. А. Марковъ выводятъ помощію теоремы Ролля, то при этомъ приходится имѣть дѣло съ вычисленіемъ производной

$$f^{(m)}(\xi),$$

гдѣ ξ есть количество, заключенное въ данныхъ предѣлахъ.

Разсмотримъ, напримѣръ, дополнительный членъ формулы (316). Этотъ дополнительный членъ R, какъ видно изъ формулы (317), можемъ представить такъ:

$$R = K(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

При этомъ уравненіе

$$f(z) = \Phi(z) + K(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-l)^{\lambda}, \quad (322_6)$$

гдѣ $\Phi(z)$ есть вышеуказанный полиномъ степени $m-1$, должно имѣть слѣдующіе $m+1$ корней: корень $z=x$ (одинъ разъ), корень $z=a$ (α разъ), корень $z=b$ (β разъ),..., корень $z=l$ (λ разъ). Если количества $a, b, \ldots, l$ и x дѣйствительныя и

если z_0 и z_1 суть наименьшее и наибольшее изъ нихъ, то въ предѣлахъ z_0 и z_1 заключаются не менѣе $m+1$ дѣйствительныхъ корней уравненія (322_6). Вслѣдствіе этого и на основаніи теоремы Ролля, уравненіе

$$\varphi^{(m)}(z) = 1.2\ldots m\, K,$$

получаемое изъ уравненія (322_6) m—кратнымъ дифференцированіемъ, должно имѣть дѣйствительный корень $z=\xi$, заключенный въ предѣлахъ z_0 и z_1. Слѣдовательно

$$K = \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{1.2\ldots m}, \quad z_0 < \xi < z_1,$$

и

$$R = \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \varphi^{(m)}(\xi)}{1.2\ldots m}. \qquad (322_7)$$

Вычисленіе входящей въ формулу (322_7) производной $\varphi^{(m)}(\xi)$ вообще представляетъ значительныя трудности, если m велико. Но трудности эти облегчаются, если особыя точки функціи $\varphi(z)$ изслѣдованы настолько, что окажется возможнымъ примѣнить къ вычисленію производной $\varphi^{(m)}(\xi)$ процессъ, указанный въ n^0 33. Найденное такимъ образомъ приближенное выраженіе производной $\varphi^{(m)}(\xi)$, которое вообще будетъ измѣняться при измѣненіи ξ отъ z_0 до z_1, будетъ имѣть наименьшее и набольшее значенія, могущія послужить къ опредѣленію предѣловъ, въ которыхъ заключается количество $\varphi^{(m)}(\xi)$.

§ 14. Приближенное вычисленіе интеграла $\int_p^q f(z)\,\psi^m(z)\,dz$ въ томъ случаѣ, когда перемѣнное z и интегрируемая функція дѣйствительныя. Связь этого вычисленія съ Петербургскими изслѣдованіями относительно предѣльныхъ величинъ интеграловъ.

n^0 42. Разсмотримъ здѣсь интегралъ

$$J = \int_p^q f(z)\,\psi^m(z)\,dz, \qquad (323)$$

предполагая, что $p<q$ и что функція $\psi(z)$ при возрастаніи z отъ p до q остается величиною дѣйствительною и не перемѣняетъ своего знака. Будемъ ниже считать величину $\psi(z)$ *положительною.*

Разсматриваемый интегралъ примѣчателенъ въ томъ отношеніи, что путь этого интеграла, проектирующійся на плоскость комплекснаго перемѣннаго отрѣзкомъ pq оси дѣйствительныхъ величинъ, самъ по себѣ, безъ всякаго преобразованія деформаціей, представляется *основнымъ* и притомъ *ортогональнымъ.* Maximum maximorum функціи $\psi(z)$ при возрастаніи z отъ p до q представляетъ величину K_1, а тѣ значенія z, для которыхъ функція $\psi(z)$ при разсматриваемомъ измѣненіи пріобрѣтаетъ это значеніе K_1, соотвѣтствуютъ главнымъ точкамъ основного пути pq.

Главная точка ζ, изображающая величину, заключенную *между* p и q, если она не есть особая точка функціи $\psi(z)$, должна непремѣнно удовлетворять условію:

$$\psi'(\zeta)=0, \tag{324}$$

при чемъ показатель ν кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$ долженъ быть *четнымъ* числомъ.

Если для какого либо изъ предѣловъ p и q интеграціи функція $\psi(z)$ пріобрѣтаетъ значеніе K_1, то этотъ предѣлъ будетъ главною точкой; но для него показатель ν кратности корня $z=\zeta$ уравненія $\psi(z)=\psi(\zeta)$ можетъ быть числомъ какъ четнымъ, такъ нечетнымъ, а также можетъ совпадать съ единицей.

Если предѣлы интеграла J и его интегрируемая функція зависятъ отъ нѣкоторыхъ перемѣнныхъ параметровъ, то путь pq интеграла J можетъ имѣть также *подглавныя* точки, для которыхъ функція $\psi(z)$ обращается въ maximum и пріобрѣтаетъ значеніе, меньшее K_1, но стремящееся къ K_1. Подглавныя точки также либо удовлетворяютъ уравненію (324), либо соотвѣтствуютъ предѣламъ интеграціи.

Величина K_2 для основного пути pq находится указаннымъ

въ *nn*° 21 и 26 порядкомъ, при чемъ эта величина K_2 будетъ имѣть *нормальное* значенiе (см. *n*° 26). Если, поэтому, отношенiе $K_2 : K_1$ будетъ стремиться къ 1, то мы будемъ имѣть дѣло съ *существенно* особымъ случаемъ перваго рода. Такъ будетъ, напримѣръ, если разность $q-p$ предѣловъ интеграцiи весьма мала, при чемъ для вычисленiя интеграла J въ этомъ случаѣ можно воспользоваться однимъ изъ прiемовъ, указанныхъ въ *n*° 20.

Предположимъ затѣмъ, что отношенiе $K_2 : K_1$ не стремится къ 1. Выдѣливъ изъ пути интеграла J нормальныя звенья перваго или второго рода и отдѣливъ ихъ второстепенныя части, затѣмъ можемъ воспользоваться тѣмъ или другимъ изъ процессовъ вычисленiя, указанныхъ въ §§ 4, 5 и 9. При этомъ представляется особенно умѣстнымъ примѣненiе теоремы III. Еще болѣе чувствительные результаты даетъ примѣненiе вычисленiй, указанныхъ въ примѣчанiи 3 къ *n*° 9.

n° 43. Изслѣдованiя относительно предѣльныхъ величинъ интеграловъ, начатыя *П. Л. Чебышевымъ* и продолженныя другими русскими, преимущественно Петербургскими, математиками [1]), можно поставить въ нѣкоторую связь съ изложеннымъ исчисленiемъ. Связь эта обнаруживается при разсмотрѣнiи интеграла (323), такъ какъ упомянутыя изслѣдованiя касаются интеграловъ, въ которыхъ перемѣнное и интегрируемая функцiя дѣйствительныя.

Постановка вопроса относительно предѣльныхъ величинъ интеграловъ, выраженная въ той формѣ, какую приняли *А. А. Марковъ* и *К. А. Поссе*, слѣдующая.

Даны количества a, b и v, удовлетворяющiя неравенствамъ $a < v < b$, и даны значенiя интеграловъ:

$$\int_a^b \varphi(y)\,dy, \int_a^b y\,\varphi(y)\,dy, \int_a^b y^2\,\varphi(y)\,dy, \ldots, \int_a^b y^{s-1}\,\varphi(y)\,dy.$$

---

[1]) Указанiя на эти изслѣдованiя сдѣланы во введенiи.

При условіи, что $\varphi(y)$ не можетъ получать въ промежуткѣ отъ $y = a$ до $y = b$ отрицательныхъ значеній, найти высшій и низшій предѣлы для каждаго изъ интеграловъ:

$$\int_a^v \Omega(y)\,\varphi(y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_a^b \Omega(y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Рѣшеніе этого вопроса дается при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ относительно функціи $\Omega(y)$.

Сопоставимъ теперь эту постановку вопроса съ вышеизложенными процессами вычисленія, кои примѣняются къ интегралу (323). Возьмемъ для простоты одно какое-нибудь звено $\zeta\xi$ перваго рода, принадлежащее пути pq интеграла (323), и разсмотримъ соотвѣтствующій ему интегралъ:

$$[\zeta\xi] = \int_\zeta^\xi f(z)\,\psi^m(z)\,dz, \tag{325}$$

гдѣ ζ есть главная точка. Пусть ν есть показатель кратности корня $z = \zeta$ уравненія $\psi(z) = \psi(\zeta)$. Преобразуемъ перемѣнное z, полагая:

$$\psi(z) = \psi(\zeta)\,e^{-y^\nu} \tag{326}$$

и считая новое перемѣнное y положительнымъ. Послѣ преобразованія найдемъ:

$$[\zeta\xi] = \int_0^\eta e^{-my^\nu}\,\Pi(y)\,dy, \tag{327}$$

гдѣ

$$\Pi(y) = f(z)\frac{dz}{dy}. \tag{327'}$$

Пусть $\Pi(y)$ представляется такъ:

$$\Pi(y) = y^{\beta-1}\,\Omega(y), \tag{328}$$

гдѣ $\beta > 0$ и $\Omega(y)$ есть функція, голоморфная въ области точки $y = 0$ и не обращающаяся въ нуль при $y = 0$.

При этихъ обозначеніяхъ и условіяхъ приближенное вычисленіе интеграла (327), основанное на разсматриваемомъ исчисленіи, есть не иное что, какъ опредѣленіе высшаго и низшаго предѣловъ интеграла

$$[\zeta\xi] = \int_0^\eta \Omega(y)\,\varphi(y)\,dy$$

при $\eta > 0$ и при данныхъ извѣстныхъ величинахъ интеграловъ:

$$\int_0^\infty \varphi(y)\,dy, \quad \int_0^\infty y\,\varphi(y)\,dy, \ldots, \quad \int_0^\infty y^{s-1}\,\varphi(y)\,dy,$$

при чемъ $\varphi(y)$ имѣетъ слѣдующій частный видъ:

$$\varphi(y) = e^{-my^\nu}\,y^{\beta-1}, \qquad (329)$$

а $\Omega(y)$ опредѣляется равенствомъ (328).

При этомъ сближеніи нашихъ выводовъ съ Петербургскими изслѣдованіями мы воспользовались преобразованіемъ (326). Но, очевидно, каждое изъ преобразованій общаго вида (109) приводитъ къ заключеніямъ того же характера.

Различныя ограниченія, налагаемыя на функцію $\Omega(y)$ при Петербургской постановкѣ вопроса, безъ сомнѣнія, находятся во внутренней связи съ особыми случаями различныхъ родовъ, кои представляются при примѣненіи разсматриваемаго исчисленія къ интегралу (325).

§ 15. Вычисленіе высшаго предѣла модуля данной функціи $F(z)$ для точекъ z даннаго пути ab.

n^0 44. Вспомогательную, но весьма существенную роль въ разсматриваемомъ исчисленіи играетъ слѣдующая задача.

Даны функція $F(z)$ и кривая ab, описываемая изображеніемъ величины z. Пусть функція $F(z)$ конечна и непрерывна

для всѣхъ точекъ z этой кривой. Найти конечное количество ***M*** *такъ, чтобы оно было не менѣе maximum maximorum модуля функціи $F(z)$ для точекъ z кривой ab.*

Если кривая ab есть окружность, описанная изъ центра ζ радіусомъ r, то для точекъ этой кривой

$$z = \zeta + re^{\varphi i},$$

и задача приводится къ изысканію количества M, которое не менѣе maximum maximorum модуля выраженія $F(\zeta + re^{\varphi i})$ при возрастаніи φ отъ $\varphi_0 + 2\pi$. Задача въ этомъ видѣ послѣ Коши, который присвоилъ ей названіе исчисленія предѣловъ (Calcul des limites), трактовалась много разъ [1]) и послужила предметомъ многочисленныхъ и важныхъ приложеній въ теоріи рядовъ и въ общей теоріи дифференціальныхъ уравненій. Теорема Коши-Руше, которою мы пользовались выше, опирается въ выраженіи своихъ условій на эту задачу.

Но разсматриваемое исчисленіе приближенныхъ выраженій интеграловъ вида (1) требуетъ рѣшенія вышеуказанной задачи не только въ томъ случаѣ, когда кривая ab есть полная окружность, но также и тогда, когда кривая эта имѣетъ другія формы. Такую задачу приходится предварительно разрѣшать, напримѣръ, при примѣненіи той или другой изъ формулъ (61_1) или (61_4), а также той или другой изъ формулъ (47), (47′), (66), (68), (79), (102), (118′), (120′), (131) и (133′). Болѣе или менѣе удачное рѣшеніе вышеуказанной задачи, соотвѣтствующее каждой изъ этихъ формулъ, отражается на большей или меньшей чувствительности этой формулы. Поэтому полезно болѣе глубокое проникновеніе въ рѣшеніе этой задачи.

Сдѣлаемъ здѣсь нѣсколько общихъ замѣчаній по поводу рѣшенія поставленной задачи для случая, когда кривая ab не есть полная окружность. Пусть эта кривая *непрерывная* и пусть функція $F(z)$ на протяженіи ея между точками a и b не имѣетъ особыхъ точекъ.

---

[1]) См. „Рядъ Лагранжа“, гл. II, § 13.

Найдя основной путь Λ, можемъ разбить его, какъ въ n^0 **33**, на звенья и отдѣлить его второстепенныя части и затѣмъ примѣнять извѣстные намъ процессы для составленія искомаго приближеннаго выраженія интеграла (304).

При этихъ вычисленіяхъ, подобныхъ тѣмъ, кои указаны въ n^0 33, могутъ представляться особые случаи различныхъ родовъ. Между прочимъ, если точка $z=h$, которая будетъ особою точкою функціи $f(z)$, придвинется безконечно близко къ какой либо изъ главныхъ или подглавныхъ точекъ, то мы будемъ имѣть дѣло съ особымъ случаемъ второго рода (см. n^0 22).

2) Если рядъ (293) есть рядъ Лагранжа, представляющій функцію $H(x+z)$ корня z уравненія:

$$z = t\,\Theta(x+z), \tag{306}$$

то будемъ имѣть:

$$S = H(x+z) = H(x) + \sum_{k=1}^{k=m-1} \frac{t^k}{1.2\ldots k} \frac{d^{k-1}\{H'(x)\,\Theta^k(x)\}}{dx^{k-1}} + R_m, \tag{307}$$

гдѣ

$$R_m = \int_{(O)} f(z)\,\psi^m(z)\,dz; \tag{308}$$

$$\psi(z) = \frac{\Theta(x+z)}{z},\ f(z) = \frac{t^m H(x+z)\left\{1 - \dfrac{z\,\Theta'(x+z)}{\Theta(x+z)}\right\}}{2\pi i\,\{z - t\,\Theta(x+z)\}}, \tag{309}$$

при чемъ путь (O) есть замкнутая кривая, ограничивающая сплошную односвязную площадь, внутри которой лежатъ точка $z=0$ и точка, изображающая корень $z=z_1$ уравненія (306), *уникурсально соединимый* съ точкой $z=0$, и не лежатъ другія особыя точки функціи $f(z)\,\psi^m(z)$. Пусть особыхъ точекъ этой функціи нѣтъ и на самой кривой (O).

При сдѣланныхъ допущеніяхъ основной путь Λ, эквивалентный пути (O), будетъ совпадать съ тѣмъ путемъ, который раз-

ался въ n° 38 и послужилъ для приближеннаго вычи-
интеграла (285). Имѣя этотъ основной путь, получимъ
ость находить приближенное выраженіе интеграла (308).
ніе это вполнѣ аналогично тому, планъ котораго ука-
n° 38.

томъ будетъ имѣть мѣсто особый случай второго рода,
ка z_1, изображающая вышеупомянутый корень уравне-
), неограниченно приближается къ какой либо изъ
ь или подглавныхъ точекъ основного пути Λ. Въ этихъ
ь соотвѣтственная точка t приближается неограниченно
изъ особыхъ точекъ функціи $H(x+z)$ перемѣннаго t,
хъ на самой окружности C круга сходимости Лагран-
да, представляющаго эту функцію, или безконечно близко
окружности.

Исчисленіе приближенныхъ выраженій интеграловъ
, благодаря указаннымъ сейчасъ его способностямъ об-
суммированіе безконечныхъ рядовъ, пріобрѣтаетъ важ-
ченіе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Это
ніе можетъ служить для выясненія мотивовъ, оправды-
ь то современное направленіе теоріи дифференціаль-
авненій, которое, опираясь на интегрированіе ихъ по-
езконечныхъ рядовъ, *сосредоточиваетъ вниманіе на изу-
йствъ интеграловъ въ области ихъ особыхъ точекъ*, а
вязываетъ значенія этихъ интеграловъ для различныхъ
точекъ такъ называемымъ *аналитическимъ продолже-
ихъ интеграловъ изъ одной области въ другую.*

интегрируемъ дифференціальное уравненіе помощью без-
хъ рядовъ, расположенныхъ, напримѣръ, по цѣлымъ
ельнымъ степенямъ перемѣннаго, и если желаемъ об-
суммированіе этихъ рядовъ помощью разсматриваемаго
ія, то мы должны имѣть особыя точки функцій, пред-
ыхъ этими рядами, лежащія какъ на окружности круга
ти, такъ и вблизи этой окружности, и притомъ должны
рактеръ этихъ функцій въ области каждой изъ ука-
точекъ. Послѣ того, какъ эти точки получены и въ
сти изученъ характеръ упомянутыхъ функцій, мы мо-

16

жемъ при посредствѣ разсматриваемаго исчисленія ускорят суммированіе рядовъ, опредѣляющихъ интегралы дифференц альнаго уравненія, хотя бы перемѣнныя подходили къ самы границамъ области ихъ сходимости.

Но для такого примѣненія исчисленія еще не достаточно н особыя точки интеграловъ дифференціальныхъ уравненій и слѣдовать ихъ форму въ области этихъ точекъ. Необходимо связать значенія каждаго интеграла въ данной области съ его значеніями въ областяхъ тѣхъ особыхъ точекъ, кои, въ кач ствѣ главныхъ и подглавныхъ, вліяютъ на приближенныя вы раженія членовъ разложенія интеграла въ первой области. Эта связь устанавливается, какъ сейчасъ сказано, *аналитическимъ продолженіемъ* этихъ интеграловъ изъ одной области въ другую.

Трудности этой послѣдней задачи, т. е. аналитическаго продолженія функцій изъ одной области въ другую, въ общемъ случаѣ представляются болѣе значительными, чѣмъ опредѣленіе особыхъ точекъ интеграловъ и изслѣдованіе ихъ формы въ отдѣльныхъ областяхъ этихъ особыхъ точекъ. Такъ, общая теорія линейныхъ, дифференціальныхъ уравненій, предложенная Фуксомъ, легко разрѣшаетъ вопросы объ особыхъ точкахъ интеграловъ; но въ тѣхъ пунктахъ этой теоріи, кои относятся къ аналитическому продолженію интеграловъ, Фуксовы упрощенія этой задачи встрѣтили препятствія [1]).

Вообще современная обширная литература по дифференціальнымъ уравненіямъ, занимающаяся изслѣдованіемъ интеграловъ въ областяхъ ихъ особыхъ точекъ и связывающая значенія этихъ интеграловъ для различныхъ областей аналитическимъ

---

[1]) Объ аналитическомъ продолженіи функцій и о трудностяхъ, встрѣчающихся въ этой задачѣ при разрѣшеніи ея способомъ Фукса, трактуется въ слѣдующихъ мемуарахъ.

Fuchs „Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, inbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen". Crelle's Journ., Bd. LXXV, S. 177—223.

П. А. Некрасовъ, „О предѣльномъ кругѣ Фукса". Матем. Сборн., т. XIV.

ихъ продолженіемъ, даетъ важнѣйшее подспорье разсматриваемому исчисленію, которое въ свой чередъ облегчаетъ вычисленіе интеграловъ въ остальныхъ областяхъ.

Въ приложеніяхъ къ функціямъ, опредѣляющимъ явленія природы, перемѣнное обыкновенно бываетъ *дѣйствительнымъ*. Въ этихъ случаяхъ изслѣдованіе особыхъ точекъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій можно ограничить лишь такими особыми точками, кои оказываются ближайшими къ тѣмъ или другимъ точкамъ *дѣйствительной оси*. Эти особыя точки должны бы сосредоточивать на себѣ преимущественное вниманіе авторовъ, занимающихся дифференціальными уравненіями динамики. Остальныя особыя точки могутъ быть устранены изъ разсмотрѣнія, что̀ облегчаетъ дѣло.

При устраненіи трудностей, связанныхъ съ аналитическимъ продолженіемъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, пріобрѣтаютъ важное значеніе частные пріемы, кои сводятъ задачу интегрированія дифференціальнаго уравненія къ примѣчательнымъ формамъ, напримѣръ, къ опредѣленнымъ интеграламъ, хотя бы эти послѣдніе интегралы, сами по себѣ, были сложны. Примѣръ такого изслѣдованія особыхъ точекъ данъ въ моей статьѣ: «*Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ*» [1]).

§ 13. **Формулы интерполированія и механическихъ квадратуръ и приложеніе къ нимъ разсматриваемаго исчисленія; законы сходимости и расходимости этихъ формулъ.**

n° 41. Перейдемъ теперь къ *формуламъ интерполированія*, а также коснемся *механическихъ квадратуръ*.

Разсматриваемое исчисленіе обогащаетъ теорію интерполированія важными понятіями и выводами.

1889. Москва. „Ueber den Fuchschen Grenzkreis". Mathematische Annalen, Bd. XXXIX. Leipzig.

В. А. Анисимовъ. „Предѣльный кругъ Фукса и его приложенія". Варшава. 1892.

[1]) См. Математическій Сборникъ, т. XV.

Слѣдуя *Эрмиту* [1]), разсмотримъ одно обобщеніе формулы Тейлора, приводящее къ *такимъ* формуламъ интерполированія, погрѣшности которыхъ выражаются интегральными вычетами, приводимыми къ виду (1). Эти интегральные вычеты, слѣдовательно, допускаютъ примѣненіе разсматриваемаго исчисленія, а въ результатѣ такого примѣненія получаются не только предѣлы погрѣшностей формулъ интерполированія, но и приближенныя выраженія этихъ погрѣшностей, кои содержатъ въ себѣ *болѣе ничтожную* погрѣшность. Иначе говоря, примѣненіе къ этимъ интегральнымъ вычетамъ разсматриваемаго исчисленія можетъ повысить точность вычисленій подобно тому, какъ, напримѣръ, въ n^0 39 (пункт. II) интегральный вычетъ (304) послужилъ къ облегченію вычисленія функціи $\Phi(x+h)$, опредѣляемой по формулѣ Тейлора.

Кромѣ того, примѣненіе разсматриваемаго исчисленія къ вышеупомянутымъ вычетамъ ставитъ и строго рѣшаетъ еще не вполнѣ выясненный вопросъ объ условіяхъ *годности* и *негодности* (иначе, *сходимости* и *расходимости*) соотвѣтствующихъ интерполяціонныхъ формулъ. Изъ этихъ условій обыкновенно указываются нѣкоторыми авторами лишь простѣйшія и только достаточныя. Такого рода указанія можно найти, напримѣръ, въ мемуарѣ *А. Ю. Давидова:* «Объ одной общей формулѣ въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ» (Математическій Сборникъ, т. X, 1882) и въ упомянутомъ выше курсѣ *Эрмита*. Но нѣкоторые русскіе математики совершенно пренебрегаютъ этими условіями. Такъ, этотъ важный вопросъ упущенъ изъ виду, напримѣръ, въ сочиненіи *А. А. Маркова* «Исчисленіе конечныхъ разностей» (Отд. I. С.-Петербургъ. 1889), хотя авторъ, повидимому, желалъ дать въ своемъ сочиненіи систематическое и полное изложеніе основъ теоріи интерполированія и механическихъ квадратуръ.

Вообразимъ замкнутую кривую S, ограничивающую сплошную односвязную площадь, внутри которой находятся неподвижныя

---

[1]) См. „Cours de M. Hermite, professé pendant le 2-e semestre 1881—82", rédidigé par *M. Andoyer*. Second tirage, revu par *M. Hermite*, pp. 76—77. Paris. 1883.